
Geometría
Geometría
Intelectum
EVOLUCIÓN







Unidad 1

- Identifica las notaciones de una semirrecta, de un rayo y las representa gráficamente.
- Define los diferentes elementos de un segmento.
- Efectúa diversas operaciones utilizando segmentos y propiedades de rectas paralelas.
- Identifica ángulos suplementarios y complementarios.
- Formula las propiedades básicas de ángulos.
- Calcula la medida de ángulos complementarios y suplementarios.
- Identifica las principales líneas notables dentro de un triángulo.
- Calcula la longitud de los lados de un triángulo aplicando la clasificación de estos por la medida de sus lados.
- Resuelve problemas que implica la utilización de las líneas notables dentro de un triángulo.
- Expresa gráficamente los principales triángulos pitagóricos.
- Utiliza el teorema de Pitágoras para la resolución de problemas.

Unidad 2

- Determina casos de congruencia de triángulos identificándolos gráficamente.
- Representa gráficamente las propiedades de congruencia.
- Calcula la medida de los ángulos y los lados de triángulos aplicando las clasificaciones de congruencia.
- Demuestra el teorema del punto medio en un triángulo.
- Clasifica los polígonos según su forma, medida de sus lados y ángulos.
- Identifica las propiedades en los polígonos convexos.
- Efectúa el cálculo de medidas de ángulos internos y externos, y cantidad de diagonales de polígonos utilizando sus diversas propiedades.
- Clasifica los cuadriláteros entre trapezoides, trapecios y paralelogramos.
- Demuestra las propiedades de los cuadriláteros según su clasificación.
- Analiza y representa gráficamente una circunferencia, además reconoce sus principales elementos.
- Calcula la medida de ángulos exteriores e interiores de una circunferencia, así como la medida de sus arcos aplicando propiedades.



GIZAH: PIRÁMIDE DE KEFRÉN

En el desierto de Gizah, ubicado a unos kilómetros de El Cairo, se encuentra la gran Pirámide de Kefrén. La curiosidad que envuelve a esta pirámide es que fue la primera en ser construida bajo los dogmas del triángulo sagrado egipcio (triángulo rectángulo cuyos lados tienen la longitud o proporción de 3-4-5, probablemente se construyó de esta forma para lograr ángulos rectos en las construcciones.

Las pirámides diseñadas con triángulos sagrados contienen 4 triángulos de este tipo en su estructura, siendo estos los que se forman con cada uno de las apotemas de las caras, la base y la altura de la pirámide, y que precisamente están orientados en la dirección de los cuatro puntos cardinales.



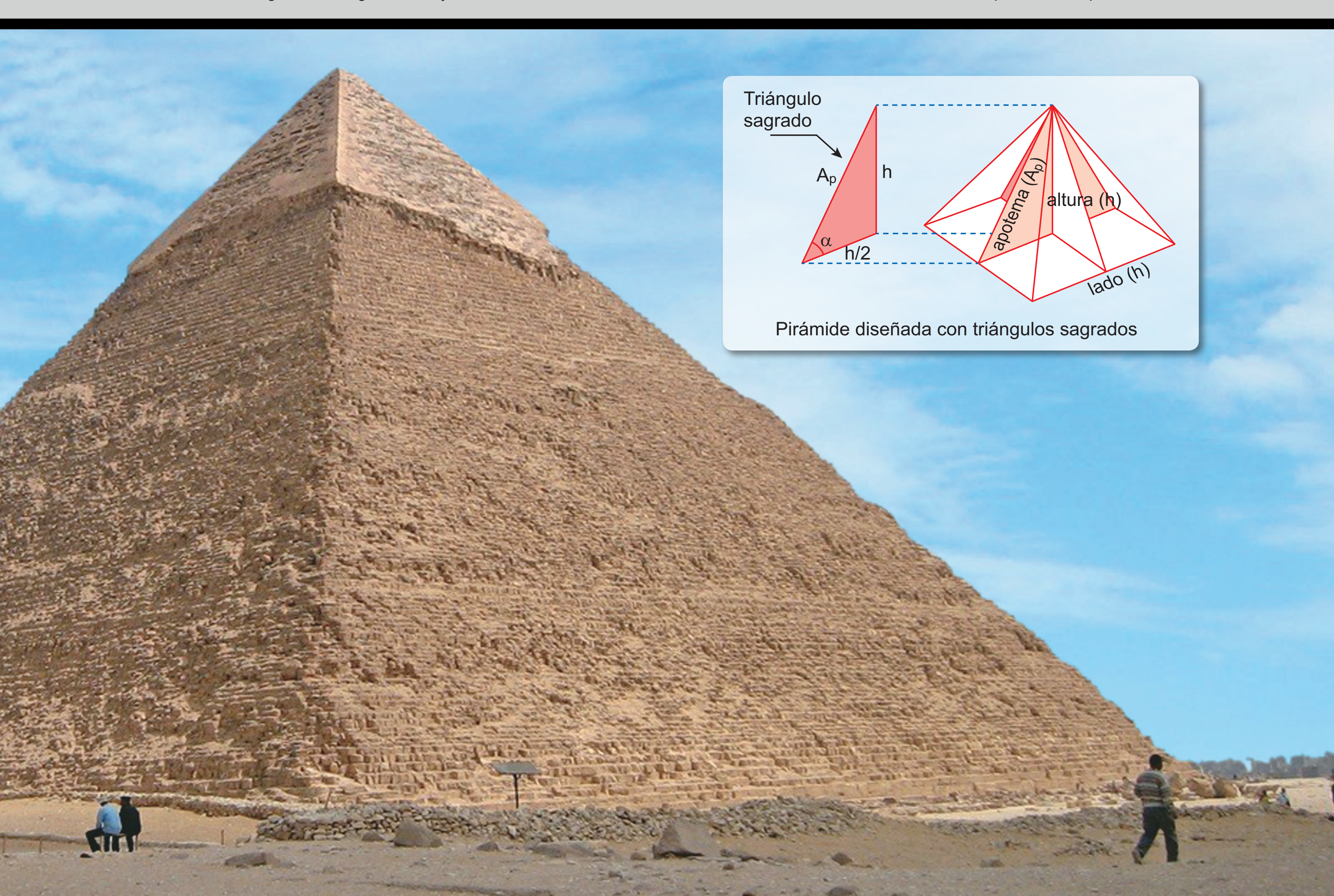
Contenido:

Unidad 3

- Evalúa la aplicación del teorema de la cuaterna armónica en las proporciones y las relaciones asociadas a Descartes y Newton.
- Interpreta los teoremas de Thales, de las bisectrices interior y exterior.
- Determina longitudes de segmentos utilizando la proporción geométrica.
- Aplica el teorema de Thales para obtener longitudes de segmento de rectas secantes intersecadas por rectas paralelas.
- Identifica elementos del triángulo y los relaciona con los casos de semejanza.
- Representa y describe las propiedades sobre semejanza de triángulos.
- Calcula longitudes, interpretando gráficamente la semejanza de triángulos, añadiendo segmentos de recta paralelos a los lados.
- Representa la proyección ortogonal de un punto y de un segmento sobre una recta.
- Evalúa cada uno de los teoremas aplicados en las relaciones métricas de triángulos rectángulos.
- Demuestra el teorema de Dostor relacionando las longitudes de los lados de dos triángulos rectángulos semejantes.

Unidad 4

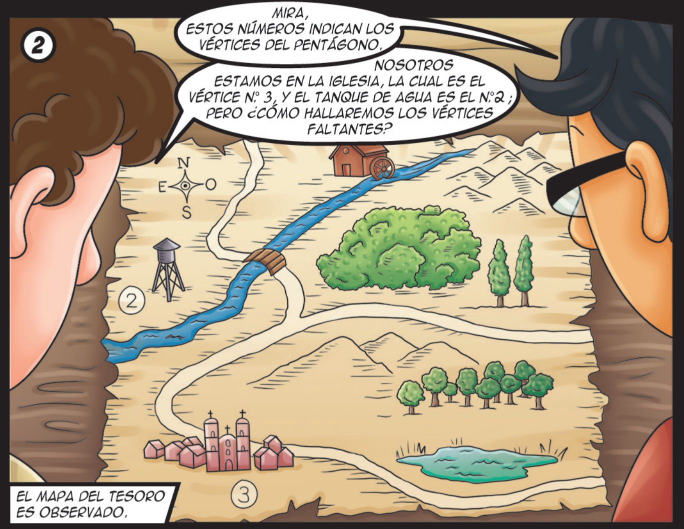
- Establece diferencias ente regiones semejantes, equivalentes y congruentes.
- Identifica las relaciones de áreas de regiones triangulares y cuadrangulares. y calcula el área de regiones triangulares y circulares.
- Determina el área de un trapecio, paralelogramo, rectángulo y de un rombo, utilizando diversas relaciones.
- Define elementos geométricos en el espacio, identifica conceptos referentes al plano en el espacio y sus posiciones relativas.
- Aplica el teorema de Thales para calcular la medida de segmentos entre planos paralelos.
- Describe los diferentes tipos de poliedros (pirámide, prisma, esfera y cilindro), además de sus elementos y su clasificación.
- Identifica los distintos casos de simetría puntual y axial en el plano cartesiano y define sus propiedades.
- Establece la traslación de figuras tomando en cuenta la dirección de los ejes coordenados, utilizando las distintas propiedades estudiadas.
- Calcula las coordenadas de rotacion de puntos en el plano.

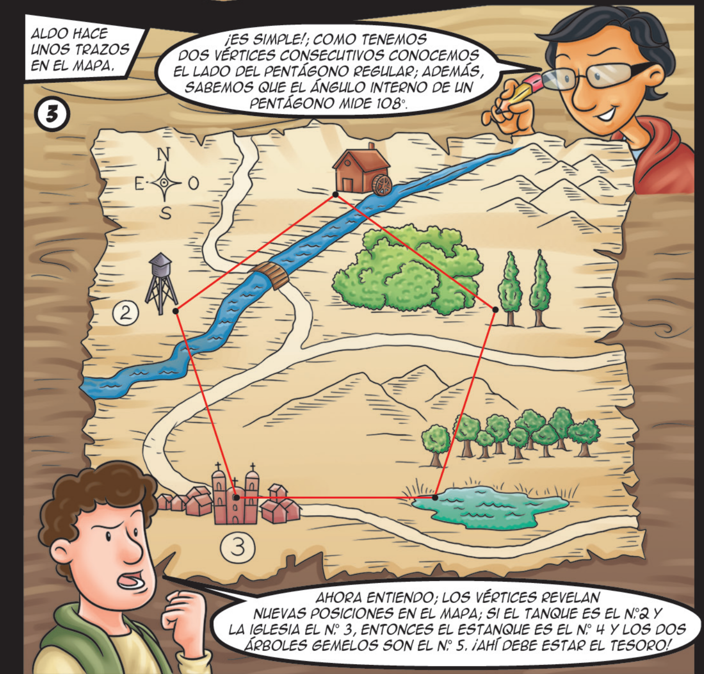


Pirámide diseñada con triángulos sagrados

LOS CAZADORES DE TESOROS



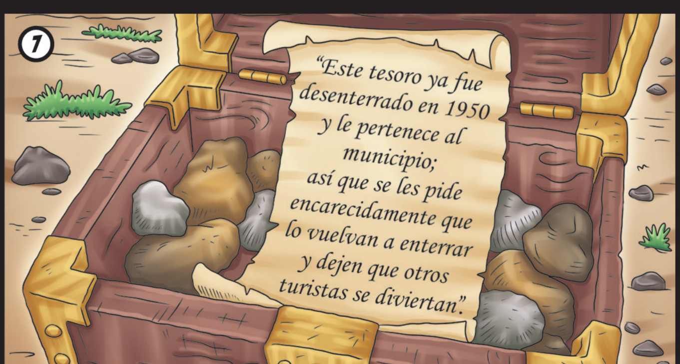




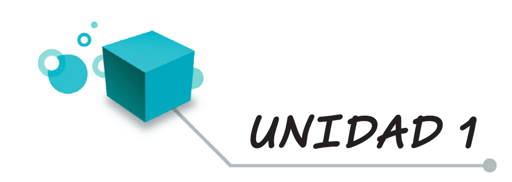








INTELECTUM

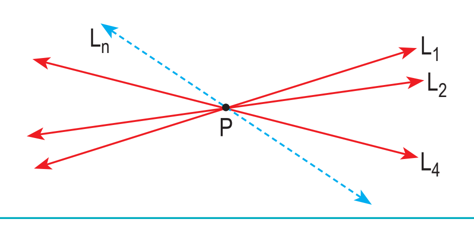
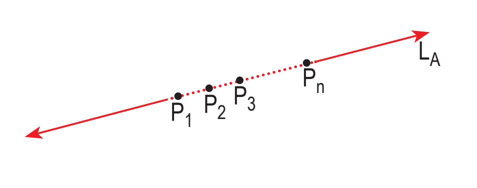




SEGMENTOS

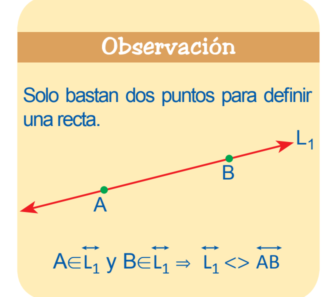
CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

Existen dos tipos de elementos idealizados y primordiales en el estudio y desarrollo de la geometría; la recta y el punto.

1. Un **punto** es la intersección de infinitas rectas en un solo lugar.	2. Una **recta** es la sucesión de infinitos puntos en una sola dirección.
	
Entonces, la **recta** origina al **punto** y a su vez el **punto** origina a la **recta**.	

Observación

Solo bastan dos puntos para definir una recta.





LA RECTA

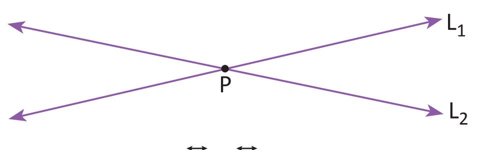
Es un elemento geométrico que se define como una sucesión de puntos que se extienden infinitamente en una sola dirección y en ambos sentidos.



Notación:
$\overleftrightarrow{AB}$: se lee, recta AB.
$\overleftrightarrow{L_1}$: se lee, recta L_1.

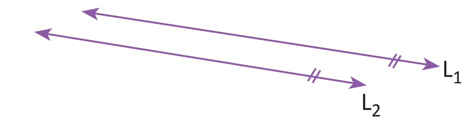
Tipos de recta

a) **Rectas secantes.** Son aquellas rectas que tienen un punto en común.



P: punto común de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

b) **Rectas paralelas.** Son aquellas rectas que no se intersecan y pertenecen a un mismo plano.



$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$: se lee, $\overleftrightarrow{L_1}$ paralelo a $\overleftrightarrow{L_2}$.

LA SEMIRRECTA

Es una recta que se extiende indefinidamente en un sentido y está limitada por un punto en el otro; además, dicho punto inicial no pertenece a la semirrecta.



Notación:
$\overset{\circ\rightarrow}{AB}$: se lee, semirrecta AB.

Atención

La mínima distancia entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une.



EL RAYO

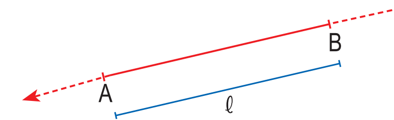
Es una recta que se extiende ilimitadamente en un extremo y limitado por un punto en el otro; además, dicho punto inicial sí pertenece al rayo.



Notación:
$\overset{\bullet\rightarrow}{AB}$: se lee, rayo AB.

EL SEGMENTO

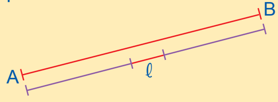
Es una porción de recta limitada por dos puntos fijos. La medida de la separación de estos dos puntos determina la longitud del segmento.



Notación:
$\overline{AB}$: se lee, segmento AB.

Atención

La longitud del segmento siempre será un número real positivo.

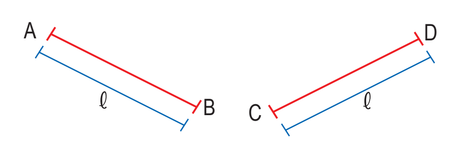


Notación:
AB = ℓ: se lee, longitud del segmento AB igual a "ℓ".



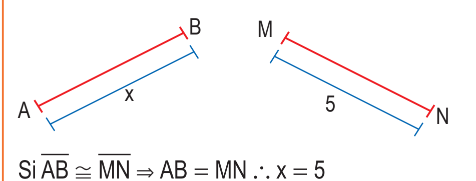
Tipos de segmentos

a) **Segmentos congruentes.** Son aquellos segmentos que tienen igual longitud.



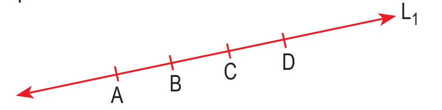
Si $AB = CD = \ell \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$

Ejemplo:
Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y MN = 5, ¿cuánto mide el segmento AB?



Si $\overline{AB} \cong \overline{MN} \Rightarrow AB = MN \therefore x = 5$

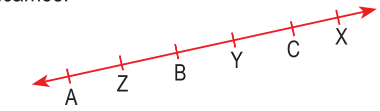
b) **Puntos colineales.** Son aquellos puntos que pertenecen a una misma recta.



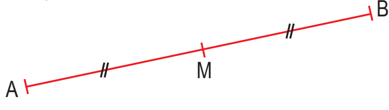
$\{A, B, C, D\} \in \overleftrightarrow{L_1} \Rightarrow$ A, B, C y D son colineales.

Ejemplo:
Grafica los puntos colineales A, Z, B, Y, C y X de manera consecutiva.
Graficamos:



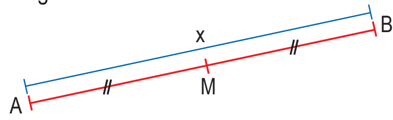


c) **Punto medio de un segmento.** Es aquel punto de un segmento que divide a este en dos segmentos congruentes.



Si $\overline{AM} \cong \overline{MB}$
$\Rightarrow$ M es el punto medio de $\overline{AB}$.

Ejemplo:
Si M es punto medio del segmento AB, calcula la longitud de este si AM = 3.



M: punto medio $\Rightarrow AM = MB$
Si $AM = 3 \Rightarrow MB = 3 \quad \therefore \; AB = 6$

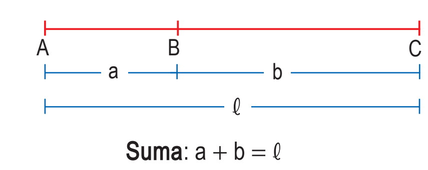
Recuerda

Si graficamos los puntos colineales A, M y B en el mismo orden en el que están escritos, entonces estos puntos serán **consecutivos**.



OPERACIONES CON SEGMENTOS

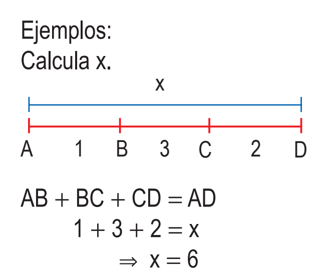
Para sumar o restar segmentos, tenemos que partir del principio fundamenta: **La suma de las partes es igual al todo.**



$\Rightarrow \underbrace{AB + BC}_{\text{Partes}} = \underbrace{AC}_{\text{Todo}} \Rightarrow a + b = \ell$

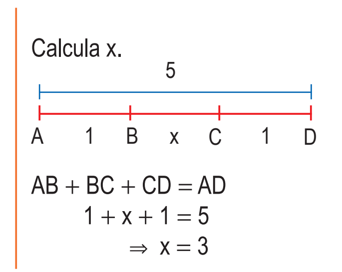
Suma: $a + b = \ell$ **Resta**: $\ell - b = a$

Ejemplos:
Calcula x.



$AB + BC + CD = AD$
$1 + 3 + 2 = x$
$\Rightarrow x = 6$

Calcula x.

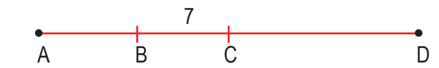


$AB + BC + CD = AD$
$1 + x + 1 = 5$
$\Rightarrow x = 3$

Problemas resueltos

1 Si B y C son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente; además, BC mide 7; calcula AD.

Resolución:



Como B es punto medio de $\overline{AC}$, entonces:
$AB = 7 \Rightarrow AC = 14$

Análogamente, C es punto medio de $\overline{AD}$, entonces:
$AC = CD \Rightarrow 14 = CD$
Por lo tanto, $AD = 14 + 14 = 28$

2 En una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q, R y S, los cuales cumplen la siguiente relación:
$3PQ = 2QR = 5RS = 180$. Halla PS.

Resolución:
Sean los puntos consecutivos:



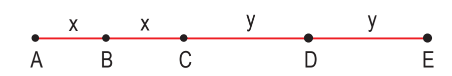
De la relación tenemos:

$3PQ = 180$	$2QR = 180$	$5RS = 180$
$PQ = 60$	$QR = 90$	$RS = 36$

Del gráfico observamos:
$PQ + QR + RS = PS$
$60 + 90 + 36 = PS$
$\Rightarrow PS = 186$

3 En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E; B es punto medio de $\overline{AC}$, y D de $\overline{CE}$. Halla BD, si AE = 100.

Resolución:
Sea el gráfico:



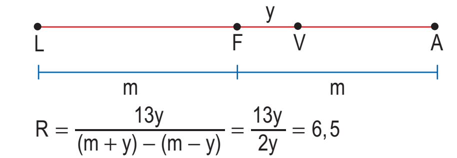
Del dato: $x + x + y + y = 100$
$2(x + y) = 100$
$x + y = 50$

Según el gráfico:
$BD = x + y$
$\Rightarrow BD = 50$

4 En una recta se toman los puntos consecutivos L, F, V y A, tal que F es punto medio de $\overline{LA}$.

Halla: $R = \dfrac{13(FV)}{LV - VA}$

Resolución:
Sea el gráfico:

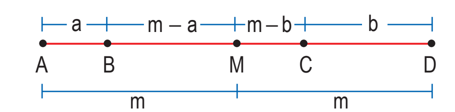


$$R = \frac{13y}{(m + y) - (m - y)} = \frac{13y}{2y} = 6,5$$

5 Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que M es punto medio de $\overline{AD}$ (M está entre B y C).

Calcula: $R = \dfrac{AB}{CD}$; si $\dfrac{AB + CD}{BM - MC} = \dfrac{4}{3}$.

Resolución:
Sea el gráfico:



$$\frac{AB + CD}{BM - MC} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{a + b}{(m - a) - (m - b)} = \frac{4}{3}$$

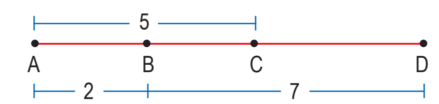
$$\frac{a + b}{b - a} = \frac{4}{3}$$

$$3a + 3b = 4b - 4a$$
$$7a = b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{7}$$

Nos piden:
$R = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow R = \dfrac{1}{7}$

6 En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que: AC = 5, BD = 7 y AD = 9; calcula BC.

Resolución:
Graficamos y colocamos los datos:



Del gráfico observamos que:
$AB = 9 - 7$
$AB = 2$
luego: $AB + BC = AC$

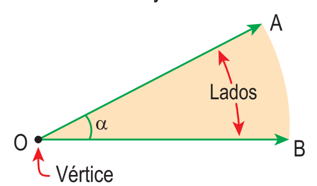
Reemplazando tenemos:
$2 + BC = 5$
$\therefore BC = 3$

Nota

Para medir un ángulo se utiliza un transportador, el cual está dividido en 180 partes, que se denominan grados sexagesimales.
⇒ 1 parte = 1° sexagesimal.

ÁNGULO PLANO

Es la figura geométrica plana determinada por dos rayos que tienen el mismo origen y la porción de plano contenido entre dichos rayos.

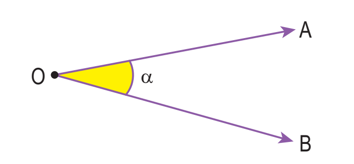


- Los rayos $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ son los lados del ángulo.
- El origen común O es el vértice del ángulo.

Notación:
$\angle AOB$: se lee, ángulo AOB.

Medida angular

La medida angular es la magnitud de la separación que hay entre los lados del ángulo.



Notación:
$m\angle AOB$: se lee, medida del ángulo AOB.
$m\angle AOB = \alpha$: donde α representa el valor del ángulo AOB.

Observación

Las medidas de un ángulo pueden variar desde 0° hasta 180° (**ángulo convexo**) y también desde los 180° hasta 360° (**ángulo cóncavo**).

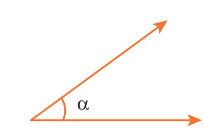


CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SUS MEDIDAS

Dependiendo de su medida, un ángulo se clasifica en:

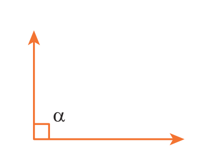
A) Ángulo agudo

Si: $0° < \alpha < 90°$



B) Ángulo recto

Si: $\alpha = 90°$



C) Ángulo obtuso

Si: $90° < \alpha < 180°$

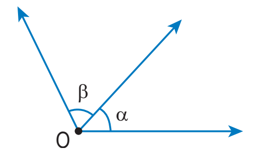
α

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

La posición de un ángulo con respecto a otro determina la siguiente clasificación:

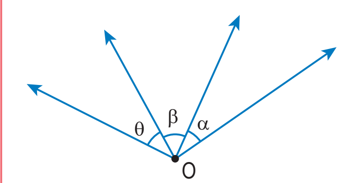
A) Adyacentes

Son aquellos ángulos separados por un rayo común a ellos, además, comparten el mismo vértice.



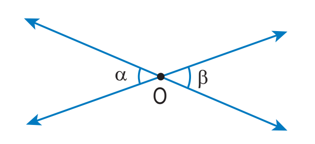
B) Consecutivos

Son aquellos ángulos separados por un lado común y son tomados uno a continuación de otro.



C) Opuestos por el vértice

Son aquellos ángulos que comparten un mismo vértice y cuyos rayos son opuestos y colineales.



Recuerda

Si α y β son dos ángulos opuestos por el vértice, se cumple que:

$\alpha = \beta$

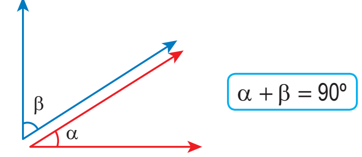


CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN LA SUMA DE SUS MEDIDAS

El resultado de la suma de dos ángulos determina la siguiente clasificación:

A Ángulos complementarios

Cuando dos ángulos suman 90°.



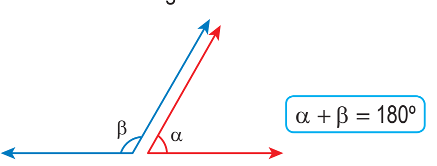
$\alpha + \beta = 90°$

- α es el complemento de β y viceversa.

Notación:
C_α: se lee, complemento de α.
$\therefore\ C_\alpha = 90° - \alpha \Rightarrow C_\alpha = \beta$

B) Ángulos suplementarios

Cuando dos ángulos suman 180°.



$\alpha + \beta = 180°$

- α es el suplemento de β y viceversa.

Notación:
S_α: se lee, suplemento de α.
$\therefore\ S_\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow S_\alpha = \beta$

Atención

La bisectriz es aquel rayo que divide a un ángulo en dos ángulos de igual medida.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS ÁNGULOS

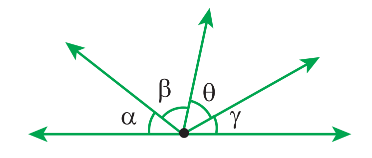
Estas propiedades se basan en dos ángulos muy especiales, los cuales son:

A) Ángulo llano

Si $\alpha = 180^\circ$ $\Rightarrow$ 

Ángulos sobre una recta

Si se tiene el siguiente gráfico:



Entonces, se cumple:

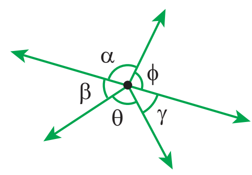
$$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 180^\circ$$

B) Ángulo de una vuelta

Si $\alpha = 360^\circ$ $\Rightarrow$ (α)

Ángulos al rededor de un punto

Si se tiene el siguiente gráfico:



Entonces, se cumple:

$$\alpha + \beta + \theta + \gamma + \phi = 360^\circ$$

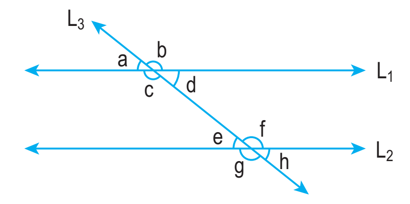
Recuerda

- Dos rectas son **paralelas** cuando no se intersecan y ambas pertenecen a un mismo plano.
- Dos rectas son **secantes** cuando tienen un punto en común.



DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA RECTA SECANTE

Cuando dos rectas paralelas son intersecadas por una recta secante se originan ocho ángulos, los cuales tienen las siguientes propiedades.

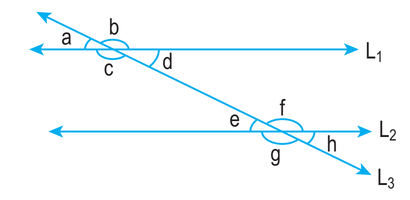


Sea: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$ secante a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$, la cual origina los siguientes ángulos:

$\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e, \angle f, \angle g$ y $\angle h$

A) Ángulos correspondientes

Cada par de ángulos correspondientes tienen la misma medida entre sí.



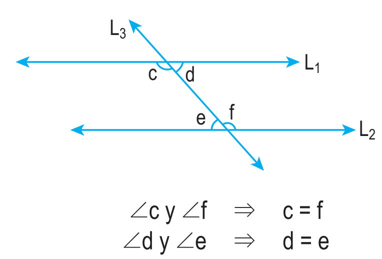
Pares de ángulos correspondientes:

$\angle a$ con $\angle e$ $(a = e)$ $\angle c$ con $\angle g$ $(c = g)$

$\angle b$ con $\angle f$ $(b = f)$ $\angle d$ con $\angle h$ $(d = h)$

B) Ángulos alternos

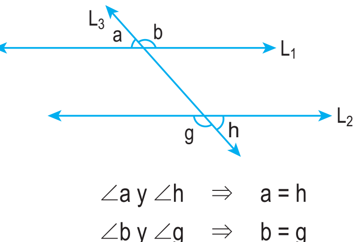
Alternos internos



$\angle c$ y $\angle f$ $\Rightarrow$ $c = f$

$\angle d$ y $\angle e$ $\Rightarrow$ $d = e$

Alternos externos

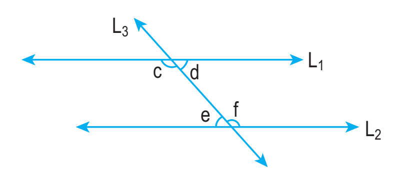


$\angle a$ y $\angle h$ $\Rightarrow$ $a = h$

$\angle b$ y $\angle g$ $\Rightarrow$ $b = g$

C) Ángulos conjugados

Conjugados internos

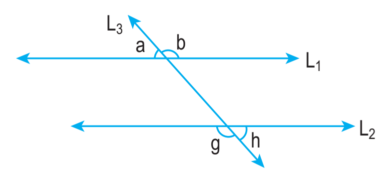


$\angle c$ y $\angle e$ $\Rightarrow$ $c + e = 180^\circ$

$\angle d$ y $\angle f$ $\Rightarrow$ $d + f = 180^\circ$

Los conjugados internos son ángulos suplementarios.

Conjugados externos



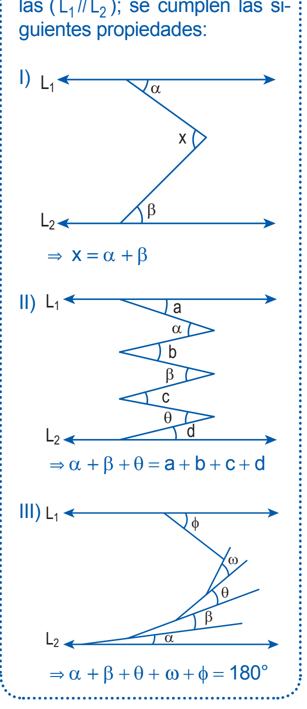
$\angle a$ y $\angle g$ $\Rightarrow$ $a + g = 180^\circ$

$\angle b$ y $\angle h$ $\Rightarrow$ $b + h = 180^\circ$

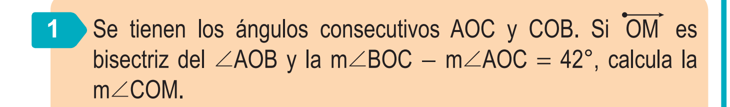
Los conjugados externos son ángulos suplementarios.

Nota

Si se tienen dos rectas paralelas ($\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$); se cumplen las siguientes propiedades:



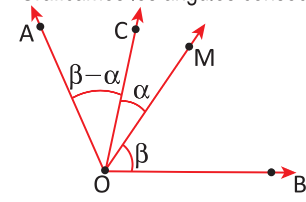
Problemas resueltos



1 Se tienen los ángulos consecutivos AOC y COB. Si $\overleftrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\angle AOB$ y la $m\angle BOC - m\angle AOC = 42°$, calcula la $m\angle COM$.

Resolución:

- Graficamos los ángulos consecutivos:



- Reemplazamos los ángulos en la siguiente ecuación:

$$m\angle BOC - m\angle AOC = 42°$$
$$(\beta + \alpha) - (\beta - \alpha) = 42°$$
$$\beta + \alpha - \beta + \alpha = 42°$$
$$2\alpha = 42°$$
$$\alpha = 21°$$

- Nos piden: $m\angle COM$

$$m\angle COM = a = 21°$$
$$\Rightarrow m\angle COM = 21°$$

2 Un tercio de la mitad del complemento del suplemento de la medida de un ángulo excede en 8° a los tres quintos del complemento de la mitad de la medida del mismo ángulo. Halla la medida de dicho ángulo.

Resolución:

Sea x el ángulo, luego planteamos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)CS_x - 8° = \left(\frac{3}{5}\right)C_{\frac{x}{2}}$$
$$\frac{1}{6}[90° - (180° - x)] - 8° = \frac{3}{5}\left(90° - \frac{x}{2}\right)$$
$$\frac{1}{6}[x - 90°] - 8° = 54° - \frac{3x}{10}$$
$$\frac{x}{6} - 15° - 8° = 54° - \frac{3x}{10}$$
$$\frac{7x}{15} = 77°$$
$$\Rightarrow x = 165°$$

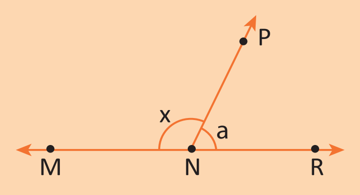
3 Un ángulo menos su complemento es igual a la cuarta parte de su suplemento. Halla dicho ángulo.

Resolución:

Sea x el ángulo, luego planteamos:

$$x - C_x = \frac{1}{4}S_x$$
$$x - (90° - x) = \frac{1}{4}(180° - x)$$
$$4(2x - 90°) = 180° - x$$
$$8x - 360° = 180° - x$$
$$9x = 540°$$
$$\Rightarrow x = 60°$$

4 Del gráfico, calcula x si: $x - \alpha = 55°$.



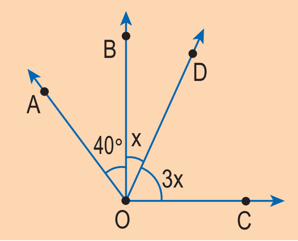
Resolución:

- Del gráfico: $x + \alpha = 180°$
- Del dato: $x - \alpha = 55°$ (+)

- Sumamos las expresiones

$$2x = 235°$$
$$\Rightarrow x = 117{,}5°$$

5 Calcula el suplemento de x, si $\overleftrightarrow{OD}$ es bisectriz del ángulo AOC.



Resolución:

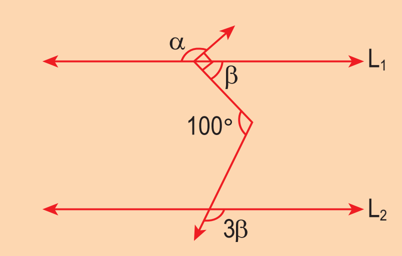
- Si $\overleftrightarrow{OD}$ es bisectriz del $\angle AOC$, entonces:

$$40° + x = 3x$$
$$x = 20°$$

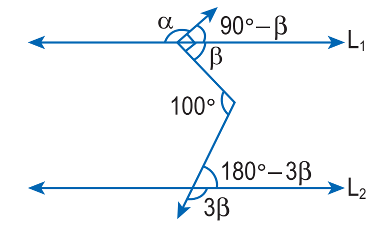
- Luego nos piden:

$$S_{20°} = 180° - 20°$$
$$\Rightarrow S_{20°} = 160°$$

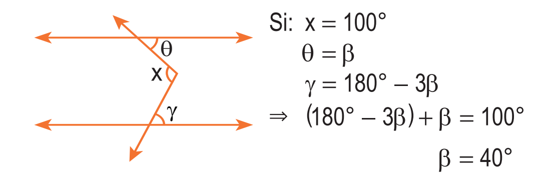
6 Halla α, si $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$.



Resolución:



- Por propiedad sabemos: $x = \gamma + \theta$



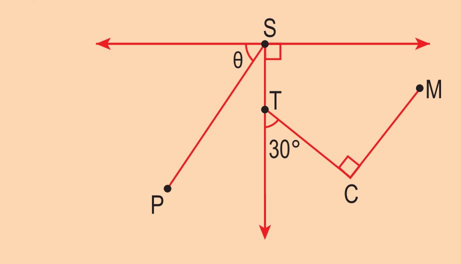
Si: $x = 100°$
$\theta = \beta$
$\gamma = 180° - 3\beta$
$\Rightarrow \; (180° - 3\beta) + \beta = 100°$
$\beta = 40°$

Por ángulo llano sabemos:

- $\alpha + (90° - \beta) = 180° \Rightarrow \alpha = 90° + \beta$

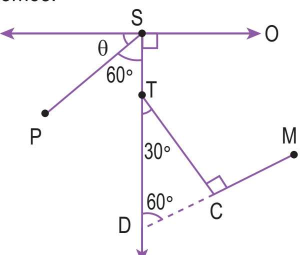
$\alpha = 90° + 40° \Rightarrow \alpha = 130°$

7 En la figura $\overline{PS} // \overline{CM}$. Calcula θ.



Resolución:

- Del gráfico tenemos:

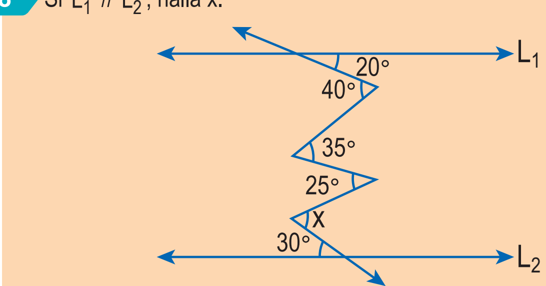


Por ángulos internos: $m\angle PST = m\angle TDC$

Entonces: $m\angle PST = 60°$

$\Rightarrow \theta = 90° - 60° = 30°$

8 Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, halla x.



Resolución:

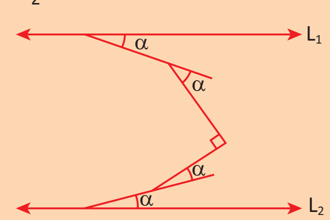
Por propiedad:

$40° + 25° + 30° = x + 35° + 20°$

$95° = x + 55°$

$\Rightarrow x = 40°$

9 Halla α si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



Resolución:

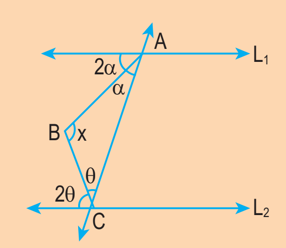
Por propiedad sabemos:

$\alpha + \alpha + 90° + \alpha + \alpha = 180°$

$4\alpha = 90°$

$\Rightarrow \alpha = 22,5°$

10 En la figura, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



Resolución:

- Por propiedad:

$x = 2\alpha + 2\theta = 2(\alpha + \theta) \quad \text{(I)}$

- Por ángulos conjugados internos:

$(2\alpha + \alpha) + (2\theta + \theta) = 180°$

$3(\alpha + \theta) = 180°$

$\alpha + \theta = 60°$

- En (I):

$x = 2(\alpha + \theta) = 2(60°)$

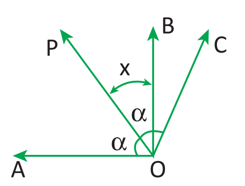
$\Rightarrow x = 120°$

11 Se tiene los ángulos consecutivos AOB y BOC, se traza la bisectriz $\overrightarrow{OP}$ del ángulo AOC.
Si $m\angle AOB - m\angle BOC = 70°$, calcula $m\angle POB$.

Resolución:

- $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo AOC.

- Si $m\angle POB = x$



- Del dato: $m\angle AOB - m\angle BOC = 70°$, reemplazamos los ángulos:

$(\alpha + x) - (\alpha - x) = 70°$

$\alpha + x - \alpha + x = 70°$

$2x = 70° \Rightarrow x = 35°$

TRIÁNGULOS



Observación

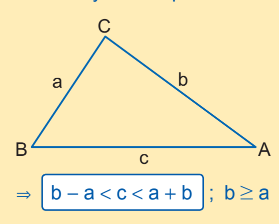
Elementos del triángulo

- Tres lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$
- Tres vértices: A; B y C
- Tres ángulos internos: α; β y θ
- Tres ángulos externos: a; b y c

Atención

Teorema de la existencia del triángulo

Para que un triángulo pueda existir un lado debe ser mayor que la diferencia de los otros dos lados y menor que su suma.



$\Rightarrow$ $b - a < c < a + b$; $b \geq a$

Recuerda

Teorema de la correspondencia

Al lado de mayor longitud se opone un ángulo de mayor magnitud.

C, θ, A, α, B, β

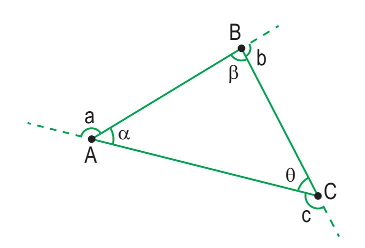
Si: $AB > BC > CA$

$\Rightarrow$ $\theta > \alpha > \beta$



DEFINICIÓN

Es una figura geométrica que se origina al unir tres puntos no colineales mediante segmentos de recta.



Notación: $\triangle ABC$

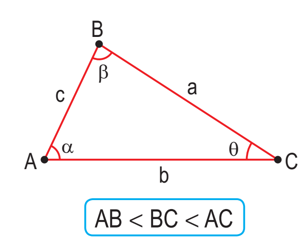
Se lee: triángulo de vértices A, B y C.

$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

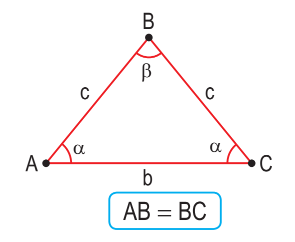
A) Por la medida de sus lados

1. **Triángulo escaleno**
   No tiene lados congruentes.



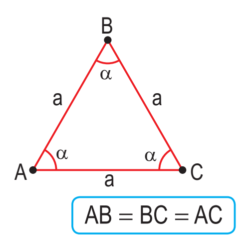
$AB < BC < AC$

2. **Triángulo isósceles**
   Tiene dos lados congruentes.



$AB = BC$

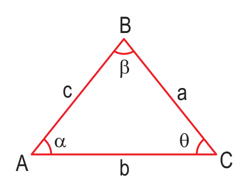
3. **Triángulo equilátero**
   Sus tres lados son congruentes.



$AB = BC = AC$

B) Por la medida de sus ángulos

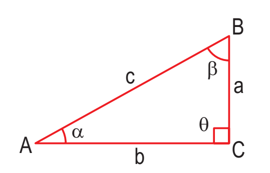
1. **Triángulo acutángulo**
   Sus tres ángulos son agudos.



$\alpha < 90°; \beta < 90°; \theta < 90°$

Se cumple: $c^2 < a^2 + b^2$

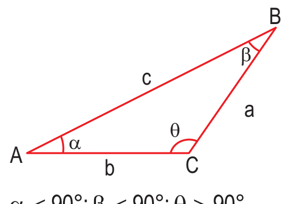
2. **Triángulo rectángulo**
   Tiene un ángulo recto.



$\alpha < 90°; \beta < 90°; \theta = 90°$

Se cumple: $c^2 = a^2 + b^2$

3. **Triángulo obtusángulo**
   Tiene un ángulo obtuso.

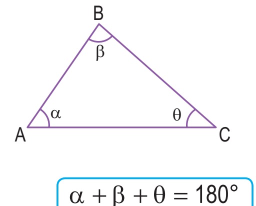


$\alpha < 90°; \beta < 90°; \theta > 90°$

Se cumple: $c^2 > a^2 + b^2$

TEOREMAS

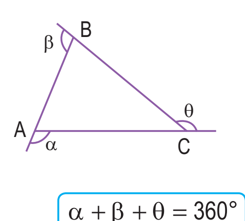
1. **En el $\triangle ABC$**



$\alpha + \beta + \theta = 180°$

Los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

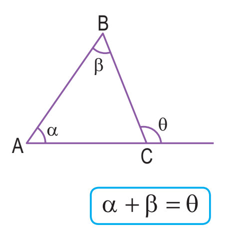
2. **En el $\triangle ABC$**



$\alpha + \beta + \theta = 360°$

Los ángulos externos de un triángulo suman 360°.

3. **En el $\triangle ABC$**



$\alpha + \beta = \theta$

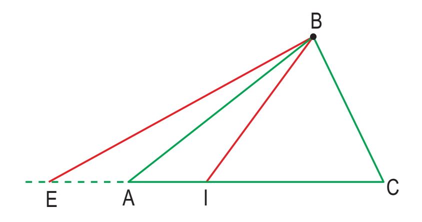
La suma de dos ángulos internos es igual a la medida del ángulo externo opuesto.

LÍNEAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

Todo triángulo tiene las siguientes líneas notables:

A) Ceviana

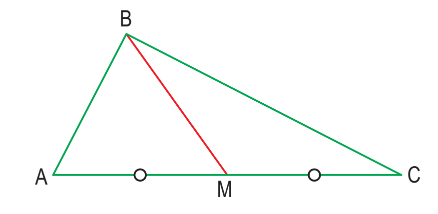
Se llama así a cualquier segmento que parte de un vértice y cae en cualquier punto del lado opuesto o en la prolongación del mismo.



En el △ABC:
BI: ceviana interior
BE: ceviana exterior

B) Mediana

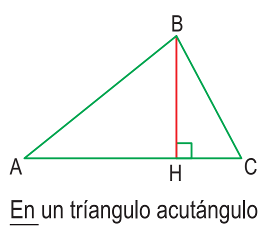
Es aquella ceviana que parte de un vértice y cae en el punto medio del lado opuesto.



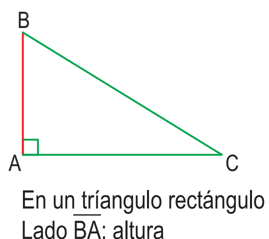
En el △ABC:
Si $\overline{AM} \cong \overline{MC}$
⇒ BM: mediana

C) Altura

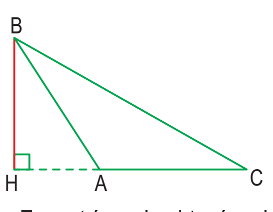
Es aquella ceviana que parte de un vértice y cae perpendicularmente en el lado opuesto o en su prolongación.



En un tríangulo acutángulo
BH: altura (dentro del tríangulo)



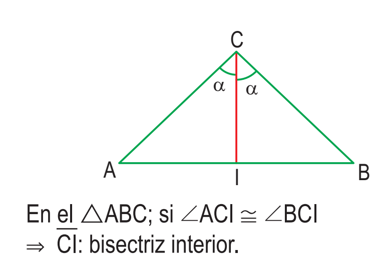
En un tríangulo rectángulo
Lado BA: altura



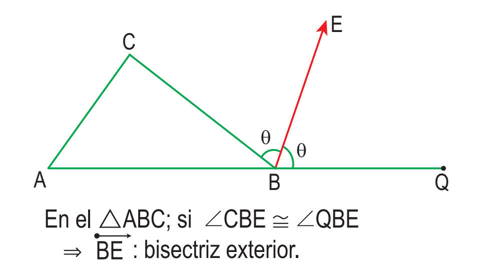
En un tríangulo obtusángulo
BH: altura (fuera del tríangulo)

D) Bisectriz

Es aquel segmento que divide a un ángulo interno en dos ángulos congruentes (**bisectriz interior**) o aquel rayo que divide a un ángulo externo en dos ángulos congruentes (**bisectriz exterior**).



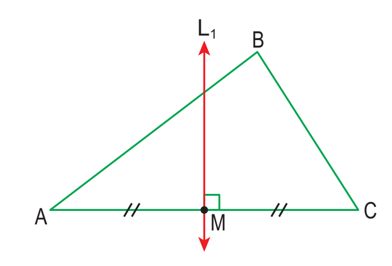
En el △ABC; si ∠ACI ≅ ∠BCI
⇒ CI: bisectriz interior.



En el △ABC; si ∠CBE ≅ ∠QBE
⇒ $\overleftrightarrow{BE}$: bisectriz exterior.

E) Mediatriz

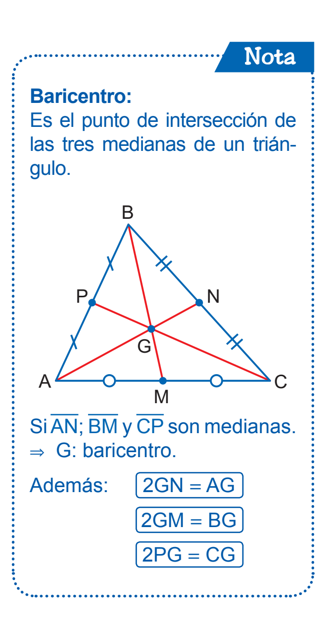
Es aquella recta que interseca a un segmento en su punto medio, formando además, con dicho segmento, un ángulo recto (90°); cada lado de un triángulo tiene por consecuencia una mediatriz.



En el △ABC:
Si $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ y $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overline{AC}$
⇒ $\overleftrightarrow{L_1}$: mediatriz de $\overline{AC}$.

Nota

Baricentro:
Es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo.

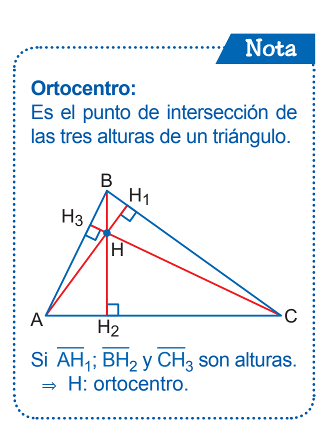


Si $\overline{AN}$; $\overline{BM}$ y $\overline{CP}$ son medianas.
⇒ G: baricentro.

Además: 2GN = AG
2GM = BG
2PG = CG

Nota

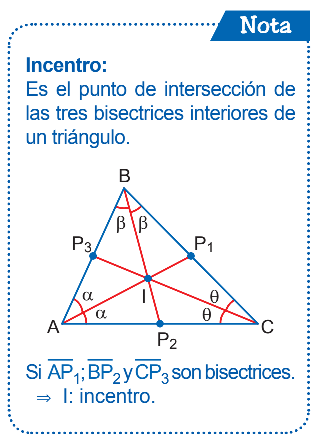
Ortocentro:
Es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.



Si $\overline{AH_1}$; $\overline{BH_2}$ y $\overline{CH_3}$ son alturas.
⇒ H: ortocentro.

Nota

Incentro:
Es el punto de intersección de las tres bisectrices interiores de un triángulo.



Si $\overline{AP_1}$; $\overline{BP_2}$ y $\overline{CP_3}$ son bisectrices.
⇒ I: incentro.

PROPIEDADES ADICIONALES

Nota

Excentro:
Es el punto de intersección de dos bisectrices exteriores.

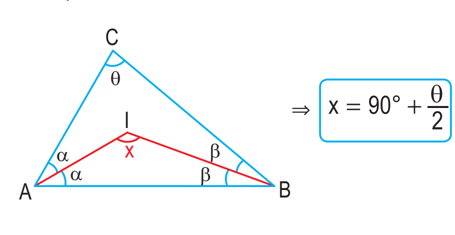
Si $\overleftrightarrow{BP_1}$; $\overleftrightarrow{CP_2}$ son bisectrices exteriores.
⇒ E: excentro.

Nota

Circuncentro:
Es el punto de intersección de tres mediatrices de los tres lados de un triángulo.

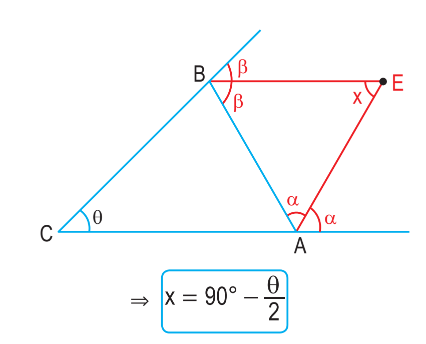
Si $\overleftrightarrow{L_1}$; $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$ son mediatrices.
⇒ O: ortocentro.

1. Si el punto I es el incentro del △ABC.



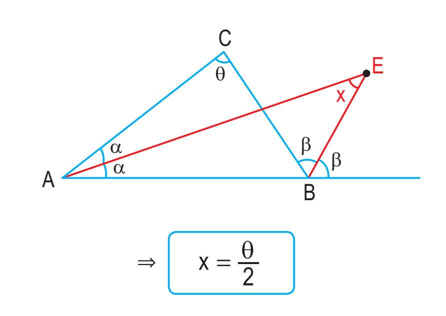
$\Rightarrow x = 90° + \dfrac{\theta}{2}$

2. Si el punto E es el excentro del △ABC.



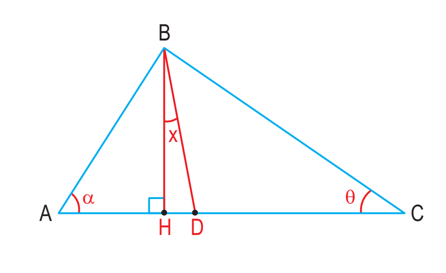
$\Rightarrow x = 90° - \dfrac{\theta}{2}$

3. Si el punto E es el excentro del △ABC.



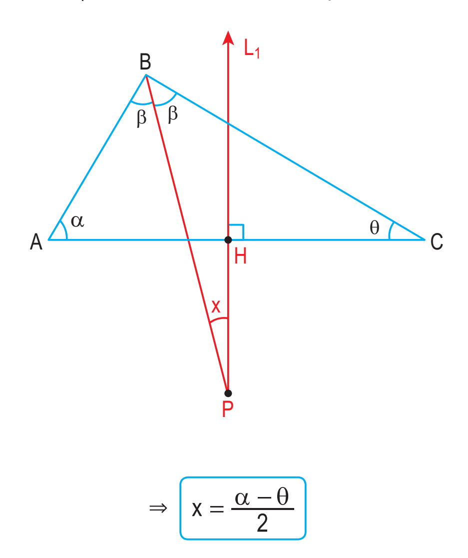
$\Rightarrow x = \dfrac{\theta}{2}$

4. Si $\overline{BD}$ es bisectriz y $\alpha > \theta$.

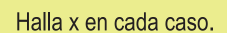


$\Rightarrow x = \dfrac{\alpha - \theta}{2}$

5. Si $\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz del lado $\overline{AC}$ y $\alpha > \theta$.



$\Rightarrow x = \dfrac{\alpha - \theta}{2}$

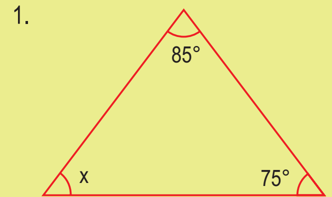


EFECTUAR



Halla x en cada caso.

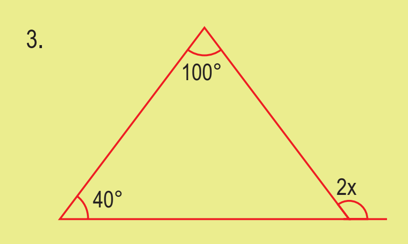
1.



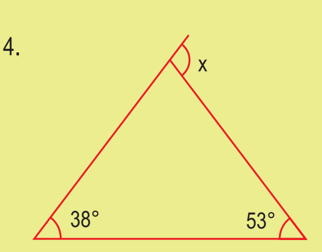
2.

2x
60°
40°

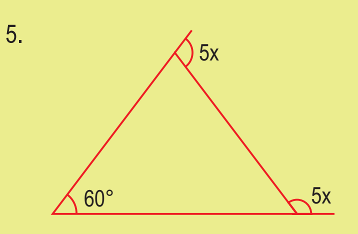
3.



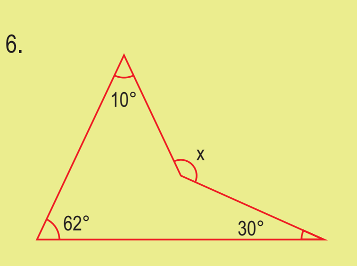
4.



5.

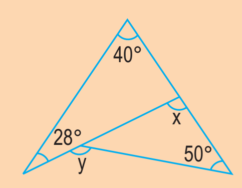


6.



Problemas resueltos

1 Halla x + y.



Resolución:

Por ángulo exterior, tanto para x como para y:

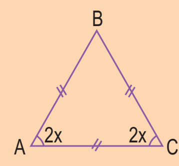
$x = 28° + 40° = 68°$

$y = x + 50° = 68° + 50° \Rightarrow y = 118°$

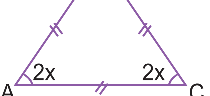
Nos piden:

$x + y = 118° + 68° \Rightarrow x + y = 186°$

2 Halla x.



Resolución:



Por definición de triángulo equilátero:

$m\angle A = m\angle B = m\angle C$

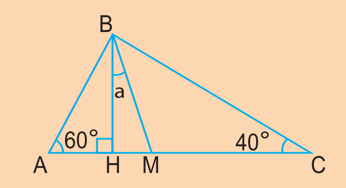
Entonces:

$2x + 2x + 2x = 180°$

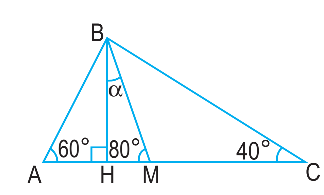
$6x = 180°$

$x = 30°$

3 Halla α, si $\overline{BM}$ es bisectriz.



Resolución:



En el △ ABC:

$60° + 40° + m\angle ABC = 180°$

$m\angle ABC = 80°$

Pero $\overline{BM}$ es bisectriz, entonces:

$m\angle MBC = 40°$

$m\angle AMB = 80°$

Por tanto, en el △ HBM:

$\alpha + 80° = 90°$

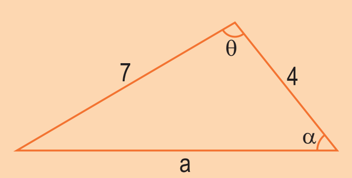
$\alpha = 10°$

Otra forma:

Como $\overline{BM}$ es bisectriz, entonces por propiedad:

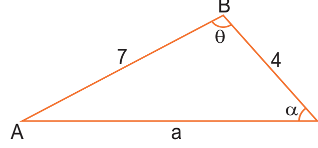
$$\alpha = \frac{60° - 40°}{2} = 10°$$

4 Si $\alpha < \theta$, ¿cuántos valores enteros toma **a** para que el triángulo exista?



Resolución:

Sea el triángulo ABC.



Por dato: $\alpha < \theta$

Entonces: $AC > AB$

$a > 7$

Además por teorema de existencia del triángulo:

$AB > BC \Rightarrow 7 - 4 < a < 7 + 4$

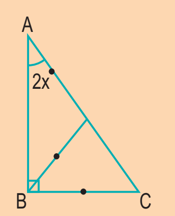
$3 < a < 11$

Pero: $a > 7$

$\therefore$ a toma 3 valores: 8; 9 y 10.

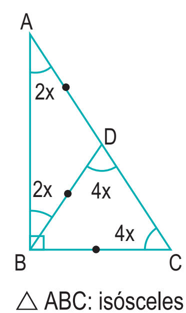


5 Halla x.



Resolución:

De la figura:



Por ángulo exterior:

$m\angle BDC = 4x$

También el △DBC: es isósceles.

$\Rightarrow m\angle C = 4x$

Por lo tanto:

$2x + 4x + 90° = 180°$

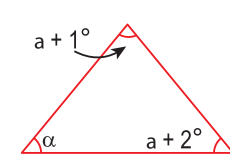
$x = 15°$

△ ABC: isósceles

$\Rightarrow m\angle A = m\angle ABD = 2x$

6 Los ángulos interiores de un triángulo son tres números consecutivos, calcula la medida del mayor ángulo.

Resolución:



Por suma de ángulos interiores:

$\alpha + \alpha + 1° + \alpha + 2° = 180°$

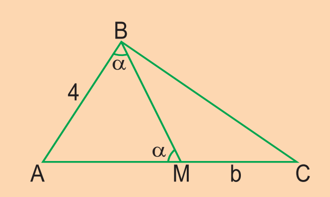
$3\alpha = 177°$

$\alpha = 59°$

El mayor es:

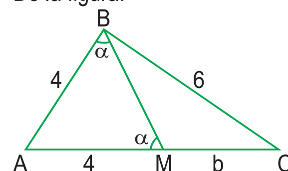
$\alpha + 2° = 59° + 2° = 61°$

7 Halla b si $\overline{BM}$ es mediana.



Resolución:

De la figura:



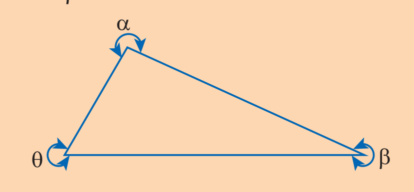
El $\triangle$BAM es isósceles:

$\Rightarrow$ AB = AM = 4

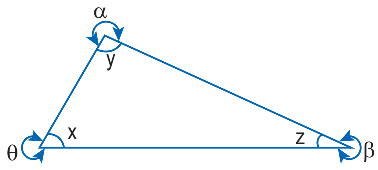
Como $\overline{BM}$ es mediana, entonces:

AM = MC = b = 4

8 Calcula $\alpha + \theta + \beta$.



Resolución:



Por ángulos interiores:

$$x + y + z = 180°$$

Además:

$$\left.\begin{aligned} \theta + x &= 360° \\ \alpha + y &= 360° \\ \beta + z &= 360° \end{aligned}\right\} +$$

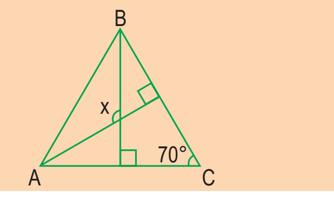
$$\theta + \alpha + \beta + \underbrace{x + y + z}_{180°} = 3(360°)$$

$$\theta + \alpha + \beta + 180° = 1080°$$

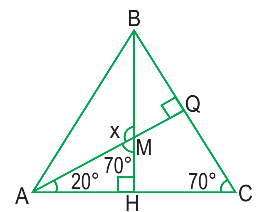
$$\theta + \alpha + \beta = 1080° - 180°$$

$$\theta + \alpha + \beta = 900°$$

9 Halla x.



Resolución:



$\overline{BQ}$ y $\overline{BH}$ son alturas del triángulo ABC y M es el cruce de las alturas.

En el ◺AQC:

m∠QAC = 20°

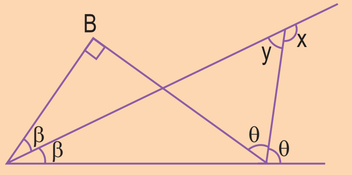
En el ◺AHM:

m∠AMH = 70°

Por ángulos suplementarios:

$x + 70° = 180° \Rightarrow x = 110°$

10 Halla el valor de x.



Resolución:

Del gráfico, **y** es un ángulo formado por 2 bisectrices, entonces por propiedad:

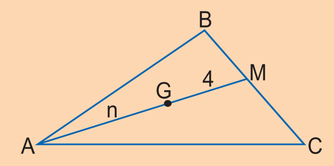
$$y = \frac{90°}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 45°$$

Por ángulos suplementarios:

$$y + x = 180°$$

$$45° + x = 180° \quad \Rightarrow \quad x = 135°$$

11 Halla el valor de n si G es el baricentro del $\triangle$ABC.



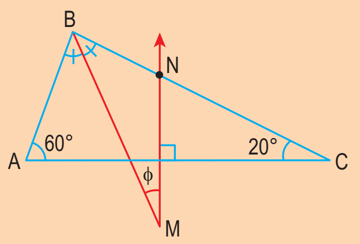
Resolución:

Por teoría, el baricentro es el cruce de las medianas y forma segmentos proporcionales, entonces:

AG = 2GM

$\therefore$ AG = 2(4) $\Rightarrow$ AG = 8 = n

12 Si $\overline{MN}$ es mediatríz del lado $\overline{AC}$ y $\overline{BM}$ es bisectríz del ∠ABC. Calcula ϕ.



Resolución:

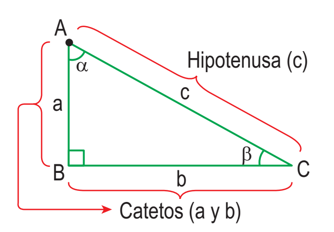
Si $\overleftrightarrow{MN}$ es mediatríz y $\overline{BM}$ es bisectríz, se cumple:

$$\phi = \frac{60° - 20°}{2} \Rightarrow \phi = 20°$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

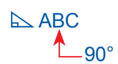
Es aquel triángulo que posee un ángulo interno recto, de esta manera los otros dos ángulos internos restantes suman 90°, es decir, son complementarios.



Notación:
⊿ ABC: se lee, triángulo rectángulo ABC.
Elementos:
AB = a
BC = b } catetos (lados adyacentes al ángulo recto)
AC = c } hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto)
α y β: ángulos agudos.

Nota

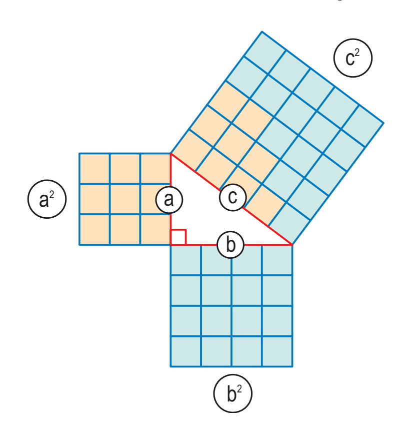
En la notación de un triángulo rectángulo, la letra que representa al vértice asociado al ángulo recto va en medio de las otras dos:





TEOREMA DE PITÁGORAS

El sabio y matemático griego Pitágoras postula el siguiente teorema: "En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de su hipotenusa".



Postulado:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Demostración:
Se construyen dos cuadrados sobre los lados **a** y **b**. Las áreas de estos cuadrados son respectivamente a^2 y b^2.

Sumamos las áreas: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ y vemos que la suma es igual al área del cuadrado construido sobre el lado **c**.

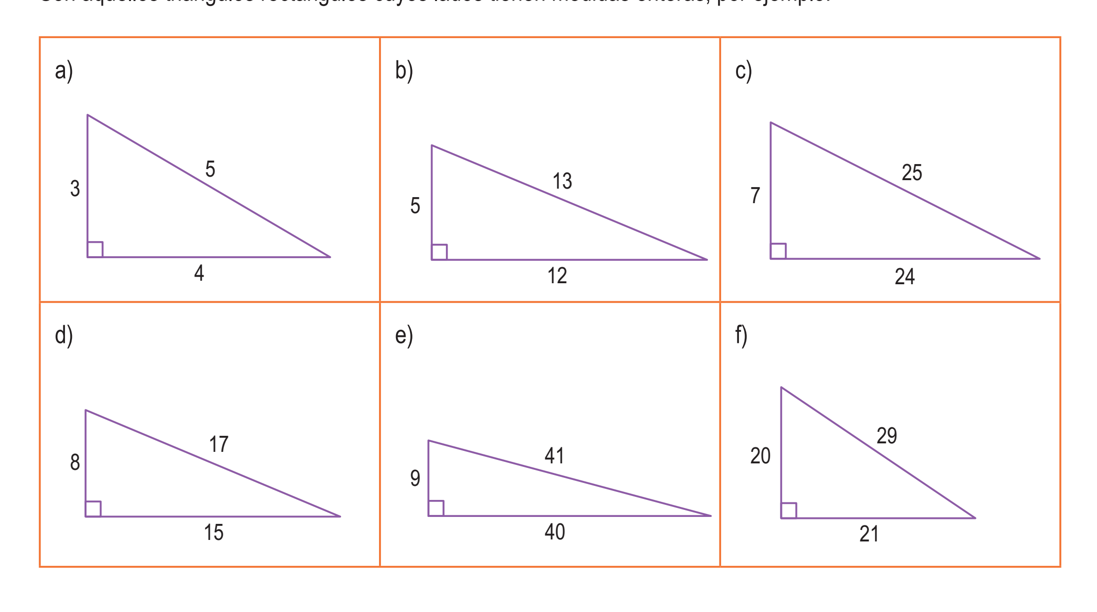
Atención

Todo triángulo rectángulo sin excepción cumple con el teorema de Pitágoras.



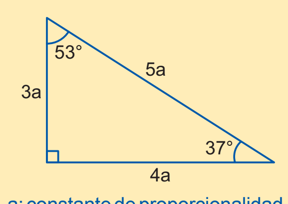
TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

Son aquellos triángulos rectángulos cuyos lados tienen medidas enteras, por ejemplo:



Observación

El triángulo pitagórico de 3; 4 y 5 también es un triángulo notable de ángulos: 37° y 53°.



a: constante de proporcionalidad.

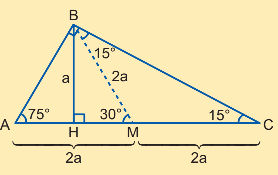


PRINCIPALES TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

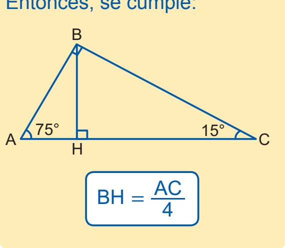
Algunos ángulos internos de un triángulo rectángulo determinan ciertas relaciones entre sus catetos y su hipotenusa que, además, son fáciles de asociar con dichos ángulos. A estos triángulos "famosos" se les denomina triángulos rectángulos notables.

Atención

Una aplicación de los triángulos rectángulos, se puede mostrar en la siguiente propiedad. En un triángulo rectángulo de 15° y 75°:

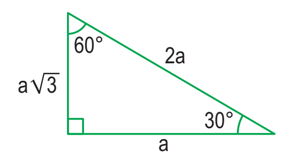


Entonces, se cumple:



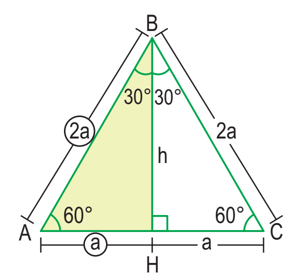
$$BH = \frac{AC}{4}$$

A) Triángulo de 30° y 60°

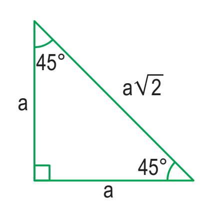


Demostración:

- Se parte de un triángulo equilátero de lado 2a.
- Trazamos la mediatriz BH = h.
  $\Rightarrow (2a)^2 = a^2 + h^2$ (T. Pitágoras)
  $h = a\sqrt{3}$

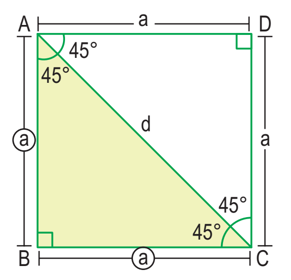


B) Triángulo de 45°



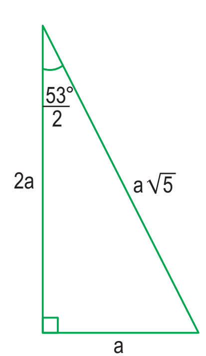
Demostración:

- Se parte de un cuadrado de lado a.
- Trazamos la diagonal AC = d.
  $\Rightarrow d^2 = a^2 + a^2$ (T. Pitágoras)
  $d = \sqrt{2}\,a$



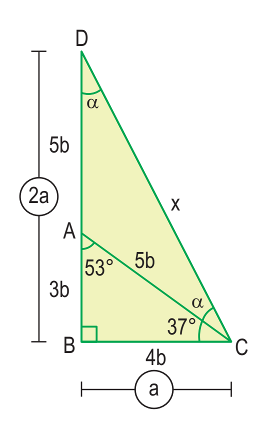


C) Triángulo de 53°/2



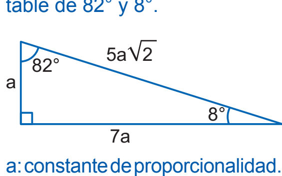
Demostración:

- Se parte del triángulo notable de 37° y 53°.
- Trazamos la ceviana exterior CD, de tal manera que AD = AC.
  $\Rightarrow 2\alpha = 53 \therefore \alpha = 53°/2$
  En el ◺DBC (T. Pitágoras):
  $x^2 = (5b + 3b)^2 + (4b)^2$
  $x = 4b\sqrt{5}$
  Pero: $4b = a \Rightarrow x = a\sqrt{5}$



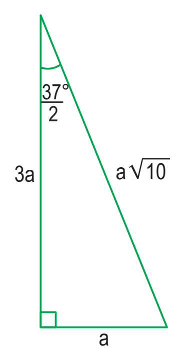
Nota

También existe un triángulo notable de 82° y 8°.



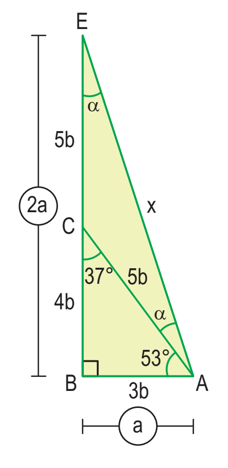
a: constante de proporcionalidad.

D) Triángulo de 37°/2



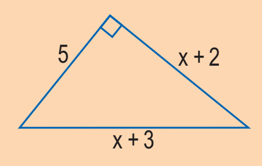
Demostración:

- Se parte del triángulo notable de 37° y 53°.
- Trazamos la ceviana exterior AE, de tal manera que, EC = AC.
  $\Rightarrow 2\alpha = 37° \therefore \alpha = 37°/2$
  En el ◺EBA (T. Pitágoras):
  $x^2 = (5b + 4b)^2 + (3b)^2$
  $x = 3b\sqrt{10}$
  Pero: $3b = a \Rightarrow x = a\sqrt{10}$



Problemas resueltos

1 Halla x.

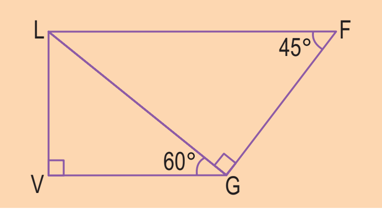


Resolución:

Por el teorema de Pitágoras:

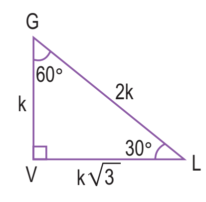
$$5^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2$$
$$25 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9$$
$$20 = 2x \Rightarrow x = 10$$

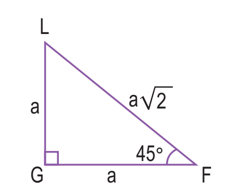
2 Calcula VG si $LF = \sqrt{6}$.



Resolución:

Sabemos que:





En el ⊿ LGF:

$\sqrt{6} = a\sqrt{2}$

$a = \sqrt{3}$

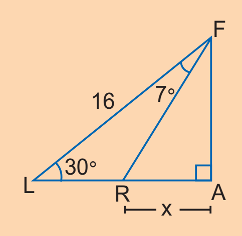
En el ⊿ LVG:

$2k = \sqrt{3}$

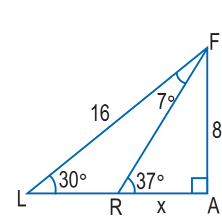
$k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore VG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 Halla x.



Resolución:



En el ⊿ LAF(30°; 60°):

FA = 8

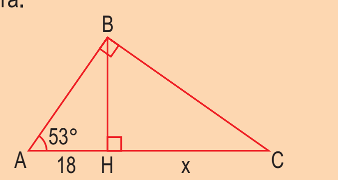
En el ⊿ RAF(37°; 53°):

$8 = 3k$

$\dfrac{8}{3} = k$

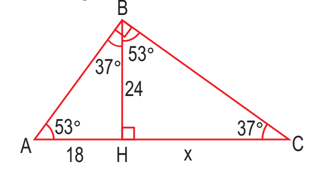
$\Rightarrow x = 4k = 4\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$

4 Halla x en la figura.



Resolución:

De la figura tenemos:



En el ⊿ AHB (53° y 37°):

Si: $AH = 3 \times 6 = 18$

$\Rightarrow BH = 4 \times 6 = 24$

En el ⊿ BHC (37° y 53°):

Si: $BH = 24 = 3 \times 8$

$\Rightarrow HC = 4 \times 8 = 32$

$\therefore x = 32$

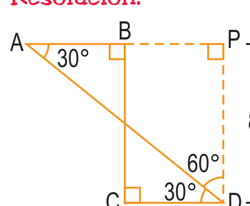
5 En la figura, calcula AD si BC = 8.

A B

30°

C D

Resolución:



Del grafico: $\overline{AP} \,//\, \overline{CD}$.

Por ángulos alternos internos:

$m\angle A = 30°$

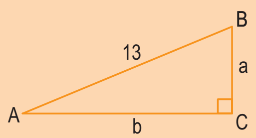
En el ⊿ APD, como:

$BC = 8 \Rightarrow PD = 8$

En el ⊿ APD(30° y 60°):

Si: $PD = 8 \Rightarrow AD = 16$

6 Si el triángulo ABC es un triángulo pitagórico, halla a + b, además, ab = 60.



Resolución:

ABC es un triángulo rectángulo pitagórico.

$\Rightarrow a < 13$ y $b < 13$; también $ab = 60$

$\{a; b\} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 60 = a \times b$,

Entonces, tenemos dos resultados:

$60 = 6 \times 10 \Rightarrow a = 6$ y $b = 10$

$60 = 5 \times 12 \Rightarrow a = 5$ y $b = 12$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en ambos casos:

1) $6^2 + 10^2 = 13^2$

$136 = 169$ (no cumple)

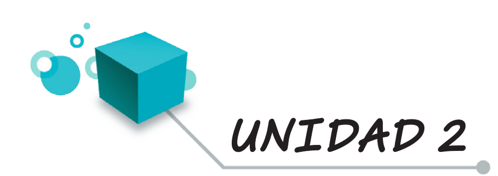
$\Rightarrow a \neq 6$ y $b \neq 10$

2) $5^2 + 12^2 = 13^2$

$169 = 169$

$\Rightarrow a = 5$ y $b = 12$

$\therefore a + b = 5 + 12 = 17$



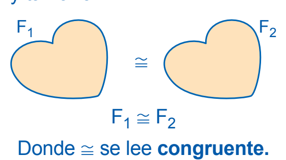
CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN

Dos triángulos son congruentes si tienen sus ángulos interiores respectivamente iguales y sus lados correspondientes de igual longitud.

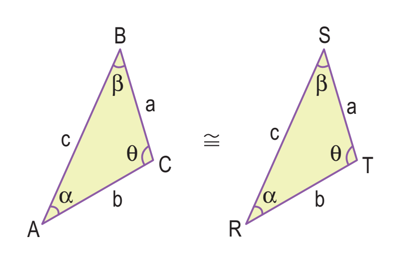
Nota

En general, dos figuras planas son congruentes cuando ambas tienen la misma forma y tamaño.



$F_1 \cong F_2$

Donde ≅ se lee **congruente.**



Si: $\overline{AB} \cong \overline{SR}$, $\overline{BC} \cong \overline{ST}$ y $\overline{AC} \cong \overline{RT}$

y $m\angle BAC \cong m\angle SRT$, $m\angle ABC \cong m\angle RST$ y $m\angle BCA \cong m\angle STR$.

⇒ Se dice que el triángulo ABC es congruente al triángulo RST.

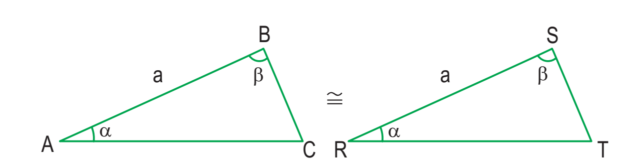
Notación:

$\Delta ABC \cong \Delta RST$

Se puede determinar si dos triángulos son congruentes a tráves de tres casos distintos:

Caso I: Ángulo - Lado - Ángulo (ALA)

Dos triángulos serán congruentes si ambos poseen un lado y dos ángulos adyacentes a este que tienen la misma medida.



En ambos casos:

$m\angle A = m\angle R = \alpha$ (Ángulo)

$AB = RS = a$ (Lado)

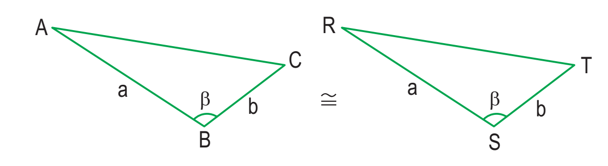
$m\angle B = m\angle S = \beta$ (Ángulo)

Caso II: Lado - Ángulo - Lado (LAL)

Dos triángulos serán congruentes si ambos poseen dos lados y un ángulo formado por estos dos lados que tienen la misma medida.

Atención

La congruencia de figuras (léase en términos prácticos como igualdad), aparece en la vida cotidiana, en nuestro quehacer diario y también en nuestros juegos.



En ambos casos:

$AB = RS = a$ (Lado)

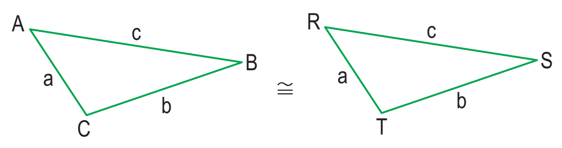
$\angle B = \angle S = \beta$ (Ángulo)

$BC = ST = b$ (Lado)



Caso III: Lado - Lado - Lado (LLL)

Dos triángulos serán congruentes si ambos poseen tres lados que tienen la misma medida.



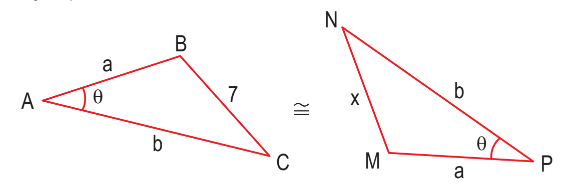
En ambos casos:

$AC = RT = a$ (Lado)

$CB = TS = b$ (Lado)

$AB = RS = c$ (Lado)

Ejemplo: halla x.



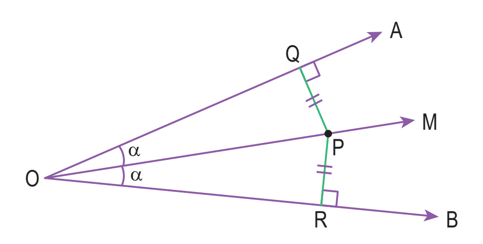
Resolución:

Vemos que: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$; pues $AB = MP = a$; $m\angle A = m\angle P$; $AC = NP = b$ (caso LAL) $\Rightarrow x = 7$

PROPIEDADES DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

A) Propiedad de la bisectriz

Si se toma un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo, entonces se cumple que dicho punto equidista de los lados de dicho ángulo.



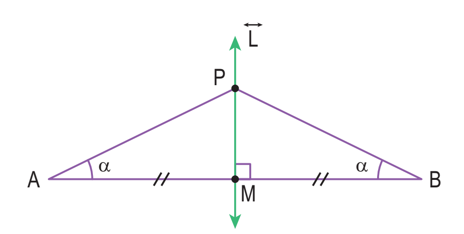
- Si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ∠AOB.

  ⇒ OQ = OR y PQ = PR
- También se cumple que:

  ⊿OQP ≅ ⊿ORP

B) Propiedad de la mediatriz

Si se toma un punto cualquiera de la mediatriz de un segmento, entonces se cumple que dicho punto equidista de los extremos de dicho segmento.



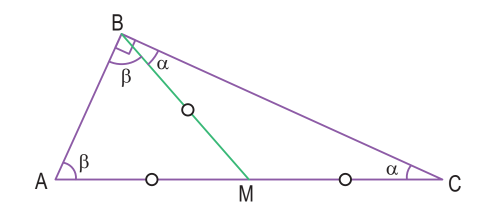
- Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

  ⇒ AP = PB
- También se cumple que:

  ⊿AMP ≅ ⊿BMP

C) Propiedad de la mediana relativa a la hipotenusa

Si en un triángulo rectángulo se traza la mediana relativa a la hipotenusa, entonces dicha mediana medirá la mitad de la hipotenusa.



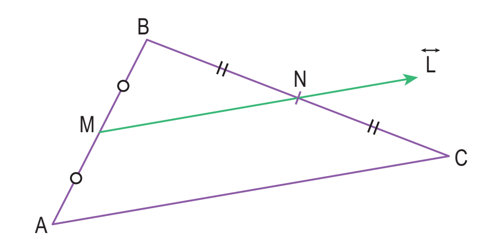
Si $\overline{BM}$ es mediana:

⇒ $BM = \dfrac{AC}{2}$

⇒ BM = AM = MC

D) Teorema de los puntos medios

Si se toma el punto medio de uno de los lados de un triángulo y por este punto se traza una recta paralela a un segundo lado, entonces dicha recta interseca al tercer lado en su punto medio.



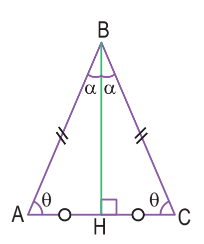
- Si $\overleftrightarrow{L}$ es paralela a $\overline{AC}$.

  ⇒ BN = NC
- También se cumple que:

  $MN = \dfrac{AC}{2}$

E) Propiedad del triángulo isósceles

Si se traza la altura relativa a la base de un triángulo isósceles, entonces dicha altura también será mediatriz, bisectriz y mediana.



Si el △ABC es isósceles (AB = BC), entonces:

- $\overline{BH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.
- $\overline{BH}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$.
- $\overline{BH}$ es bisectriz del ∠B.
- $\overline{BH}$ es altura relativa a $\overline{AC}$.

Observación

De la propiedad C.
Cuando trazamos la mediana relativa a la hipotenusa se generan dos triángulos isósceles cuyos lados iguales miden igual que dicha mediana.



Observación

De la propiedad D.
El segmento que se genera al unir los dos puntos medios de los lados de un triángulo mide la mitad del lado al cual es paralelo.



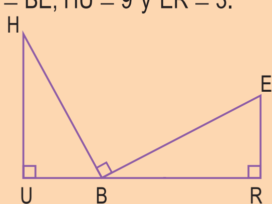
Observación

De la propiedad E.
La base de un triángulo isósceles será siempre aquel lado diferente de los otros dos lados iguales.

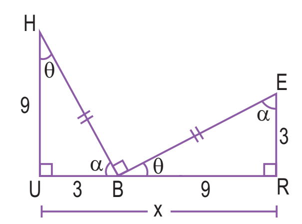


Problemas resueltos

1 Calcula UR si HB = BE, HU = 9 y ER = 3.



Resolución:



Piden x = UR

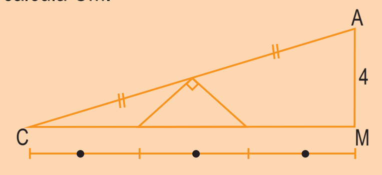
◺HUB ≅ ◺BRE (ALA)

HU = BR ∧ RE = UB

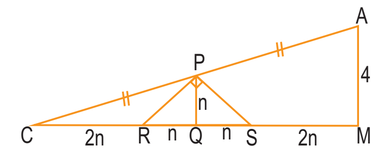
9 = BR   3 = UB

Entonces, UR = 3 + 9 = 12

2 Del gráfico, calcula CM.



Resolución:



Si trazamos $\overline{PQ}$ paralela a $\overline{AM}$, entonces PQ = 2 = n (teorema de los puntos medios).

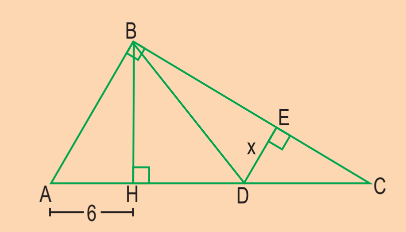
En el ◺ RPS, por propiedad de la mediana:

PQ = RQ = QS = 2 = n

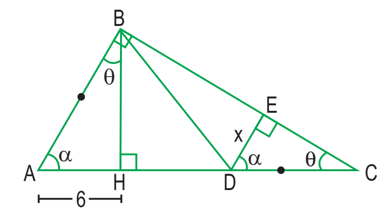
Del dato CR = RS = SM = 2n = 4

∴ CM = 12

3 En la siguiente figura, halla x sí AB = DC, AH = 6.

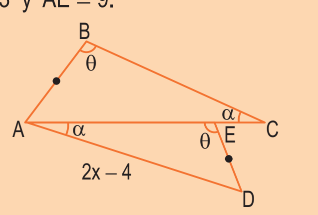


Resolución:



Del triángulo AHB y DEC observamos que se aplica el caso ALA, luego: x = 6

4 Halla x. Si CE = 3 y AE = 9.



Resolución:

Se deduce:

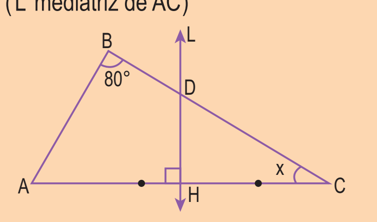
m∠BAC = 180° – (θ + α)

m∠ADE = 180° – (θ + α)

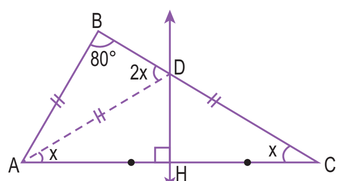
Entonces, el ΔBAC ≅ ΔEDA (ALA)

AD = AC ⇒ 2x – 4 = 12

5 En la figura mostrada, halla x.
Si: AB = CD ($\overleftrightarrow{L}$ mediatriz de $\overline{AC}$)



Resolución:



Por el teorema de la mediatriz:

AD = CD

Además:

m∠DAC = m∠DCA = x

Para el ΔADC, por ángulo exterior:

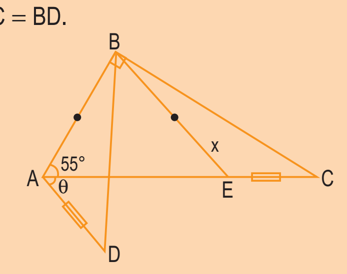
m∠ADB = 2x

Luego: ΔBAD es isósceles:

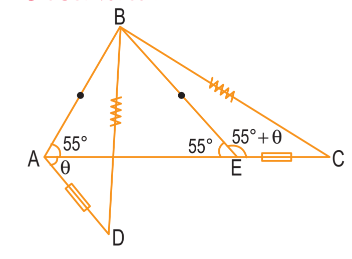
m∠ADB = m∠ABD

⇒ 2x = 80° ∴ x = 40°

6 Halla θ, si BC = BD.



Resolución:



El ΔABE es isósceles

⇒ m∠AEB = m∠BAE = 55°

EL ΔBAD ≅ ΔBEC (caso LLL)

⇒ m∠BEC = 55° + θ

∴ m∠AEB + m∠BEC = 180°

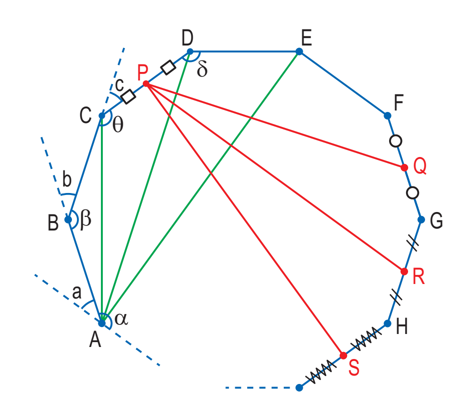
55° + 55° + θ = 180°

θ = 70°

POLÍGONOS

DEFINICIÓN

Es aquella figura geométrica cerrada que se forma al unir consecutivamente tres o más puntos no colineales y que pertenecen a un mismo plano, mediante segmentos de recta, de tal modo que esa figura limite una región del plano.



Elementos del polígono

- Vértices: A; B; C; D; E; F; G; H; ...
- Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$; $\overline{EF}$; $\overline{FG}$; $\overline{GH}$; ...
- Ángulos internos o interiores: $\alpha; \beta; \theta; \delta; ...$
- Ángulos externos o exteriores: a; b; c; ...
- Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{AD}$; $\overline{AE}$; ...
- Diagonales medias: $\overline{PQ}$; $\overline{PR}$; $\overline{PS}$; ...



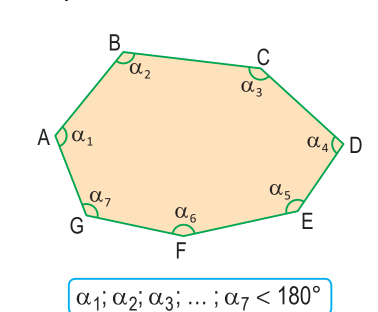
Observación

- La **diagonal** de un polígono es aquel segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.
- La **diagonal media** de un polígono es aquel segmento de recta que une los puntos medios de dos lados cualesquiera.

CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS SEGÚN SU FORMA

A) Polígono convexo

Un polígono es convexo cuando todos sus ángulos internos son convexos, es decir, miden entre 0° y 180°.

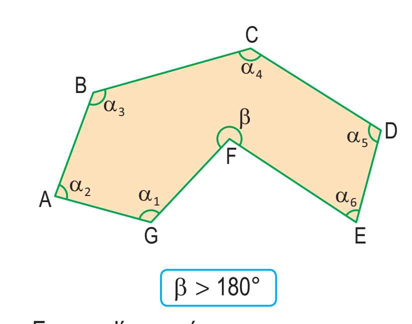


$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; ... ; \alpha_7 < 180°$

⇒ Es un polígono convexo.

B) Polígono cóncavo (no convexo)

Un polígono es cóncavo cuando al menos uno de sus ángulos internos es cóncavo, es decir, mide más de 180°.



$\beta > 180°$

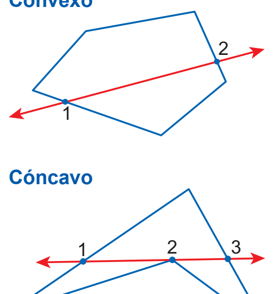
⇒ Es un polígono cóncavo.

Nota

Otra manera de reconocer si un polígono es **convexo** o **cóncavo** es trazando una recta secante al polígono, si la recta lo interseca en dos puntos es un polígono **convexo**, si lo interseca en más de dos puntos, es un polígono **cóncavo**.

Convexo

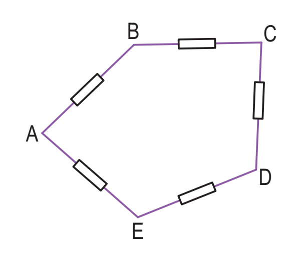
Cóncavo



CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS Y ÁNGULOS

A) Polígono equilátero

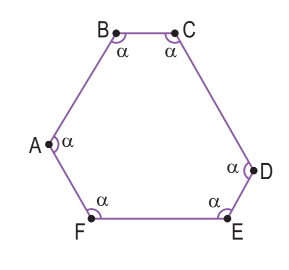
Es aquel que tiene todos sus lados congruentes.
Puede ser convexo o cóncavo.



$AB = BC = CD = DE = EA$

B) Polígono equiángulo

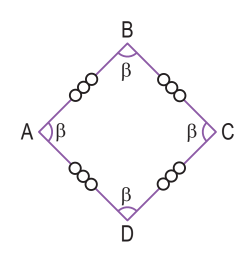
Es aquel cuyos ángulos internos son congruentes; siempre es convexo.



$\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D \cong \angle E \cong \angle F$

C) Polígono regular

Es aquel que tiene sus lados y ángulos internos congruentes.



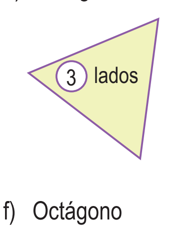
$AB = BC = CD = AD$ y

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D$

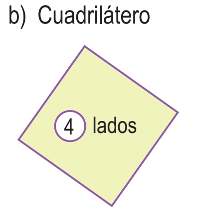
CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS SEGÚN EL NÚMERO DE SUS LADOS

Dependiendo del número de lados que poseen, los polígonos adquieren la siguiente denominación o nomenclatura:

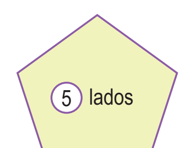
a) Triángulo



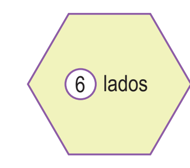
b) Cuadrilátero



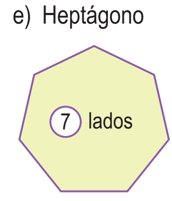
c) Pentágono



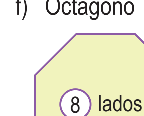
d) Hexágono



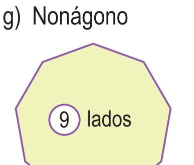
e) Heptágono



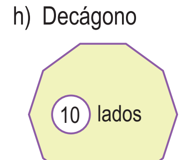
f) Octágono



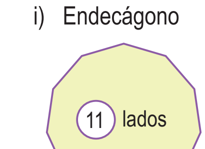
g) Nonágono



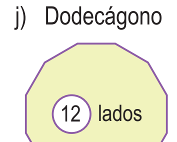
h) Decágono



i) Endecágono



j) Dodecágono



Atención

A los polígonos que tienen más de doce lados se les denomina de la siguiente manera:

n.° lados	Denominación
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octodecágono
19	Nonadecágono
20	Icoságono

PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS CONVEXOS

En un polígono de n lados, se cumple:

A) Igualdad de sus elementos:

n.° ángulos internos = n.° vértices = n

B) Suma de sus ángulos externos:

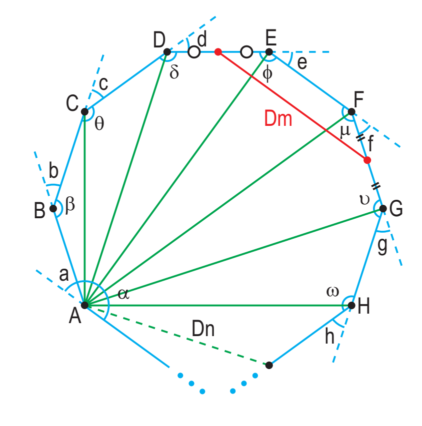
$$a + b + c + d + e + f + ... = 360°$$

$$S_{m\angle e} = 360°$$

C) Suma de sus ángulos internos:

$$\alpha + \beta + \theta + \delta + \phi + \gamma + ... = 180°(n - 2)$$

$$S_{m\angle i} = 180°(n - 2)$$



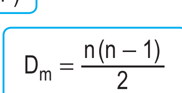
D) n.° de diagonales trazadas desde un solo vértice:

$$D_1 = (n - 3)$$

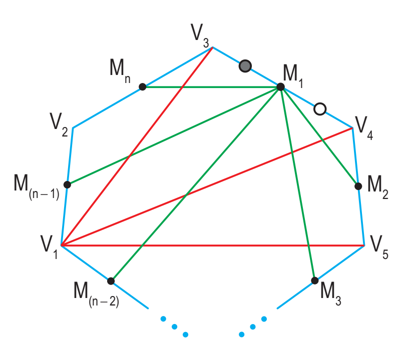
E) n.° total de diagonales: $D_T = \dfrac{n(n-3)}{2}$

F) n.° de diagonales medias trazadas del punto medio de un lado: $D_M = (n - 1)$

G) n.° total de diagonales medias:



$$D_m = \frac{n(n-1)}{2}$$



Observación

La suma de ángulos internos para polígonos convexos:

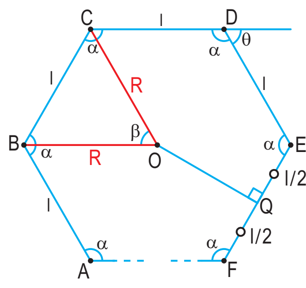
$S_{m\angle i} = 180°(n - 2)$

también se cumple para los polígonos cóncavos.



POLÍGONOS REGULARES

Un polígono regular es aquel polígono que posee lados y ángulos de igual medida; además, todo polígono regular puede ser inscrito o circunscrito a una circunferencia.



Polígono regular de n lados

Elementos del polígono regular

Ángulo interno	Ángulo central	Ángulo externo
$\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$	$\beta = \dfrac{360°}{n}$	$\theta = \dfrac{360°}{n}$

Problemas resueltos



1 ¿Cuántos lados tiene un polígono, cuya suma de las medidas de sus ángulos internos y externos es 7200°?

Resolución:

$S_{m\angle i} = 180°(n-2) \;\wedge\; S_{m\angle e} = 360°$

Dato: $180°(n-2) + 360° = 7200°$

$180°n - 360° + 360° = 7200°$

$180°n = 7200° \Rightarrow n = 40$ lados

2 Calcula el número de diagonales de un decágono.

Resolución:

$D_T = \dfrac{n(n-3)}{2}; \quad n = 10$

$D_T = \dfrac{10(10-3)}{2} \Rightarrow D = \dfrac{10 \cdot 7}{2} = 35$ diagonales

3 Calcula el número de diagonales medias de un heptágono.

Resolución:

$D_m = \dfrac{n(n-1)}{2}; \quad n = 7$

$D_m = \dfrac{7(7-1)}{2} \Rightarrow D_m = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ diagonales medias

4 ¿En qué polígono el número de diagonales medias es el doble del número total de diagonales de dicho polígono?

Resolución:

Dato: $D_m = 2D$

Reemplazamos:

$\dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2n(n-3)}{2}$

Simplificamos:

$\dfrac{n-1}{2} = n-3$

$n - 1 = 2n - 6 \Rightarrow n = 5$

Entonces, el polígono es un pentágono.

5 En un polígono regular se cumple que el doble de un ángulo exterior excede en 90° a un ángulo interior. Calcula el número de lados.

Resolución:

Dato:

Ángulo exterior:

$\dfrac{360°}{n}$

Ángulo interior:

$\dfrac{180°(n-2)}{n}$

$2\left(\dfrac{360°}{n}\right) - \dfrac{180°(n-2)}{n} = 90°$

$2\left(\dfrac{360°}{n}\right) - 180° + \dfrac{360°}{n} = 90°$

$\dfrac{3(360°)}{n} = 270° \Rightarrow n = 4$ lados

6 La suma del número de diagonales más el número de vértices de un polígono es igual al triple del número de lados. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Resolución:

Piden: n

Según el dato:

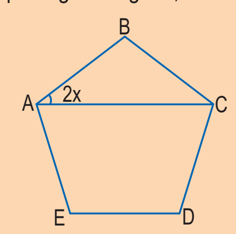
$D_T + n = 3n$

$\dfrac{n}{2}(n-3) + n = 3n$

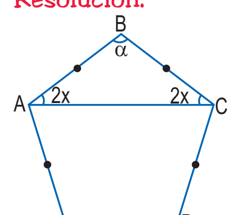
$\dfrac{\cancel{n}}{2}(n-3) = 2\cancel{n}$

$n - 3 = 4 \Rightarrow n = 7$ lados

7 Si ABCDE es un pentágono regular, calcula x.



Resolución:



Del gráfico:

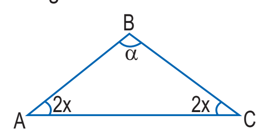
α: ángulo interior

$\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

$\alpha = \dfrac{180°(5-2)}{5}$

$\alpha = 108°$

Luego del △ABC:



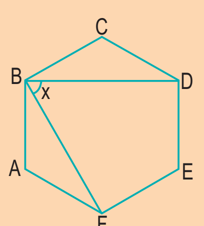
$4x + \alpha = 180°$

$4x + 108° = 180°$

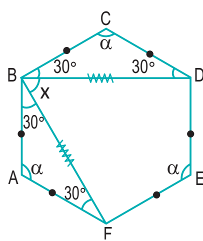
$4x = 72°$

$x = 18°$

8 Determina la medida del ángulo x, si ABCDEF es un polígono regular.



Resolución:



Sea la $m\angle BCD = \alpha$

Entonces: $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

$\alpha = \dfrac{180°(6-2)}{6}$

$\alpha = 120°$

Del gráfico observamos que ΔBCD ≅ ΔBAF, además son isósceles. Entonces: $m\angle CBD = m\angle CDB = 30°$

$m\angle ABF = m\angle AFB = 30°$

Como ABCDEF es un polígono regular, sus ángulos internos son iguales, luego: $30° + 30° + x = 120°$

$60° + x = 120° \Rightarrow x = 60°$

CUADRILÁTEROS

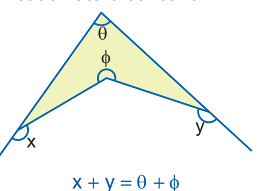


Atención

Un cuadrilátero cóncavo solo puede tener un único ángulo cóncavo (mayor que 180°).

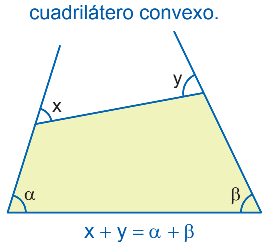
Nota

- Propiedad adicional en un cuadrilátero cóncavo.



$x + y = \theta + \phi$

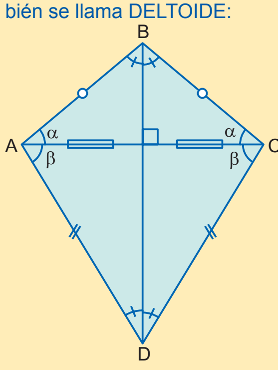
- Propiedad adicional en un cuadrilátero convexo.



$x + y = \alpha + \beta$

Observación

El trapezoide simétrico también se llama DELTOIDE:



- $\overline{BD}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.
- $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ son isósceles
- $\triangle ABD$ es simétrico al $\triangle BCD$ con respecto a la diagonal $\overline{BD}$.



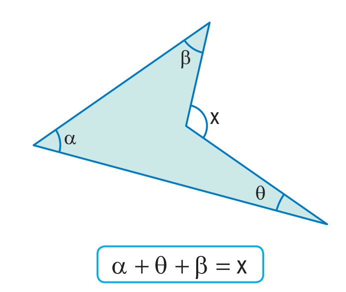
DEFINICIÓN

Es la figura geométrica que resulta al unir, mediante sus extremos, cuatro segmentos de recta coplanares y no colineales. Un cuadrilátero puede ser, además, cóncavo o convexo.

Cuadrilátero cóncavo	Cuadrilátero convexo	Elementos
B, A, C, D; β, α, θ, ω $\theta > 180°$ (ángulo cóncavo).	B, C, A, D; β, θ, α, ω $\alpha; \beta; \theta$ y ω son menores que 180°.	Vértices: A; B; C y D Lados opuestos: ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$), ($\overline{BC}$ y $\overline{AD}$). Lados consecutivos: ($\overline{AB}$ y $\overline{BC}$) , ($\overline{BC}$ y $\overline{CD}$), ($\overline{CD}$ y $\overline{DA}$), ($\overline{DA}$ y $\overline{AB}$). Ángulos opuestos: ($\angle\alpha$ y $\angle\theta$), ($\angle\beta$ y $\angle\omega$). Ángulos consecutivos: ($\angle\alpha$ y $\angle\beta$), ($\angle\beta$ y $\angle\theta$), ($\angle\theta$ y $\angle\omega$), ($\angle\omega$ y $\angle\alpha$). Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
En ambos casos se cumple que: $\alpha + \beta + \theta + \omega = 360°$		**Perímetro (2P):** $2P = AB + BC + CD + AD$

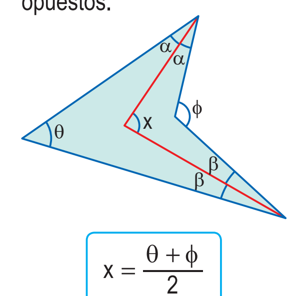
PROPIEDADES DEL CUADRILÁTERO CÓNCAVO

a) Ángulo exterior al ángulo cóncavo o al ángulo mayor que 180°.



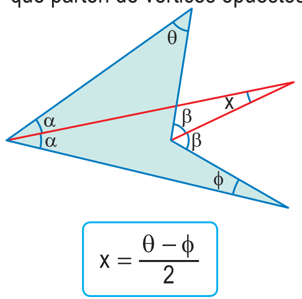
$\alpha + \theta + \beta = x$

b) Menor ángulo formado por dos bisectrices internas de ángulos opuestos.



$x = \dfrac{\theta + \phi}{2}$

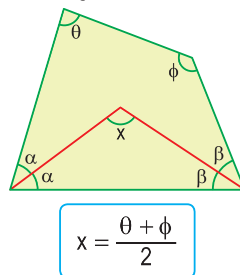
c) Menor ángulo formado por una bisectriz interior y otra exterior que parten de vértices opuestos.



$x = \dfrac{\theta - \phi}{2}$

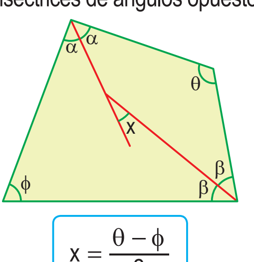
PROPIEDADES DEL CUADRILÁTERO CONVEXO

a) Ángulo formado por dos bisectrices de ángulos consecutivos.



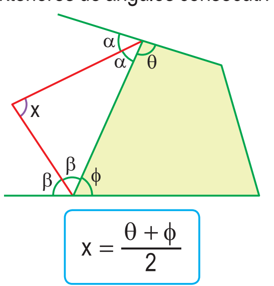
$x = \dfrac{\theta + \phi}{2}$

b) Menor ángulo formado por dos bisectrices de ángulos opuestos.



$x = \dfrac{\theta - \phi}{2}$

c) Ángulo formado por dos bisectrices exteriores de ángulos consecutivos.



$x = \dfrac{\theta + \phi}{2}$

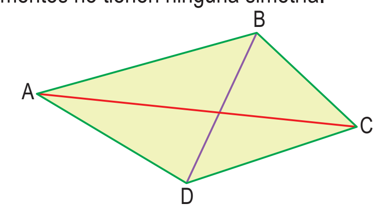
CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Los cuadriláteros convexos pueden ser clasificados, de acuerdo al paralelismo de sus lados opuestos, en:

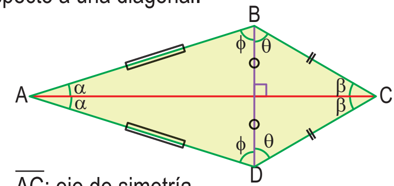
A) Trapezoides

Son aquellos cuadriláteros cuyos lados opuestos no son paralelos. Son de dos tipos:

I. **Trapezoide asimétrico:** es aquel trapezoide cuyos elementos no tienen ninguna simetría.



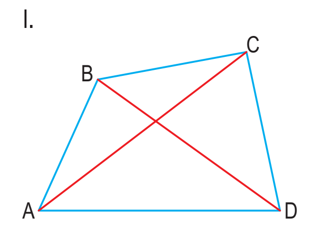
II. **Trapezoide simétrico:** es aquel cuyos lados consecutivos son simétricos a los otros dos, con respecto a una diagonal.



$\overline{AC}$: eje de simetría.

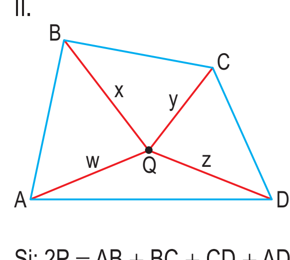
Propiedades del trapezoide

I.



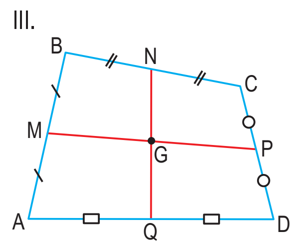
Si: 2P = AB + BC + CD + AD
$\Rightarrow$ P < AC + BD < 2P

II.



Si: 2P = AB + BC + CD + AD
P < x + y + z + w < 3P

III.



Si: M; N; P y Q son puntos medios.
$\Rightarrow$ MG = GP y NG = GQ

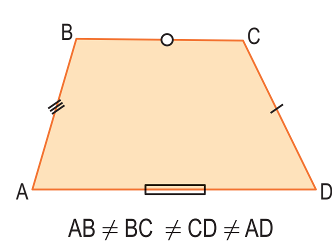
> **Recuerda**
>
> **Elementos del trapecio**
>
> $\overline{AD}$: base mayor.
> $\overline{BC}$: base menor.
> $\overline{MN}$: mediana.
> $\overline{BH}$: altura.



B) Trapecios

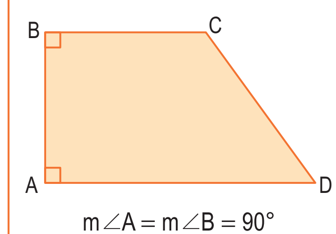
Son aquellos cuadriláteros que poseen solamente un par de lados opuestos paralelos ($\overline{BC} // \overline{AD}$) y son:

I. **Trapecio escaleno:** posee lados opuestos no paralelos de diferente medida.



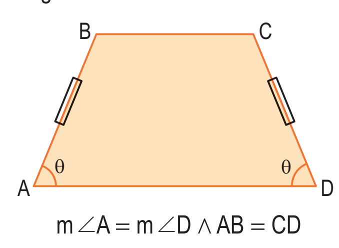
$AB \neq BC \neq CD \neq AD$

II. **Trapecio rectángulo:** posee un lado perpendicular a los lados paralelos del trapecio.



$m\angle A = m\angle B = 90°$

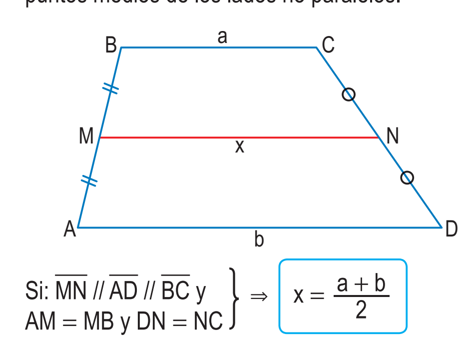
III. **Trapecio isósceles:** posee lados opuestos no paralelos de igual medida.



$m\angle A = m\angle D \wedge AB = CD$

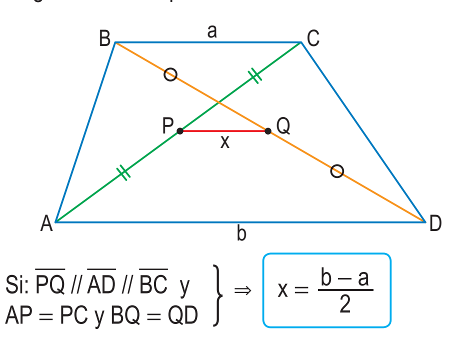
Propiedades de trapecio

I. Base media o mediana, es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.

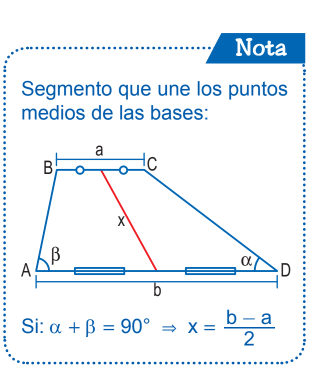


Si: $\overline{MN} // \overline{AD} // \overline{BC}$ y AM = MB y DN = NC $\Rightarrow$ $x = \dfrac{a+b}{2}$

II. Segmento que une los puntos medios de las diagonales del trapecio.



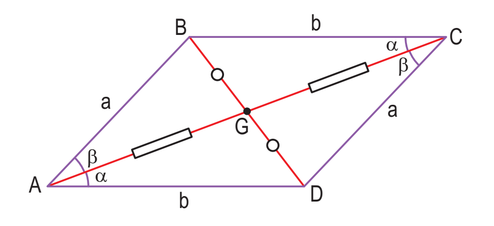
Si: $\overline{PQ} // \overline{AD} // \overline{BC}$ y AP = PC y BQ = QD $\Rightarrow$ $x = \dfrac{b-a}{2}$

> **Nota**
>
> Segmento que une los puntos medios de las bases:
>
> 
>
>
> Si: $\alpha + \beta = 90°$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{b-a}{2}$

C) Paralelogramos

Son aquellos cuadriláteros que poseen lados opuestos paralelos y congruentes, y son:

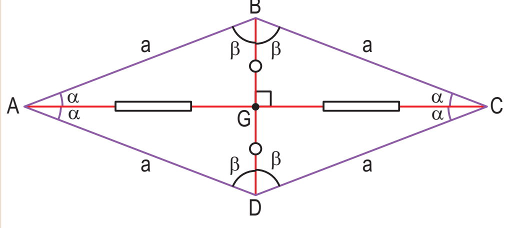
I. **Romboide:** posee lados y ángulos consecutivos de diferente medida.



- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.
- $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$; además: $m\angle A + m\angle B = 180°$.
- $\overline{AG} \cong \overline{GC}$ y $\overline{BG} \cong \overline{GD}$.

  Donde G es el punto de intersección de las diagonales AC y BD.

II. **Rombo:** posee lados congruentes y ángulos consecutivos de diferente medida.

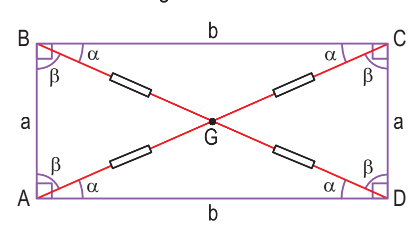


- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$.
- $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$; además: $m\angle A + m\angle B = 180°$.
- $\overline{AC}$ es mediatriz de $\overline{BD}$ y viceversa.
- $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle A$ y el $\angle C$.
- $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle B$ y el $\angle D$.

> **Recuerda**
>
> Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

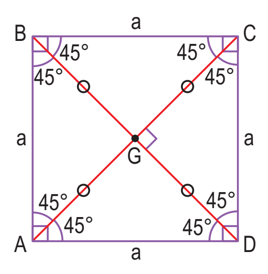


III. Rectángulo: posee ángulos congruentes y lados consecutivos desiguales.



- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D}$; ($m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90°$)
- $\overline{AG} \cong \overline{GB} \cong \overline{GC} \cong \overline{GD} \Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{BD}$

IV. Cuadrado: posee lados y ángulos congruentes.



- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D}$; ($m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90°$)
- $m\angle GAB = m\angle GBC = m\angle GCD = m\angle GDA = 45°$

Atención



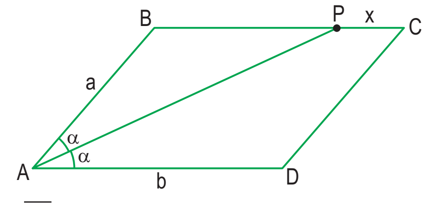
En un paralelogramo se cumple que cualquier segmento trazado entre los lados opuestos y que pase por la intersección de las diagonales es bisecado por dicha intersección.

Si: $\{G\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$

$\Rightarrow PG = GQ = \dfrac{PQ}{2}$

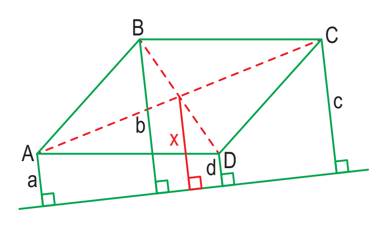


Propiedades del paralelogramo



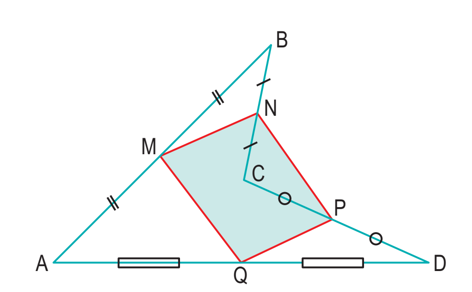
Si $\overline{AP}$ es bisectriz interior del $\angle BAD$.

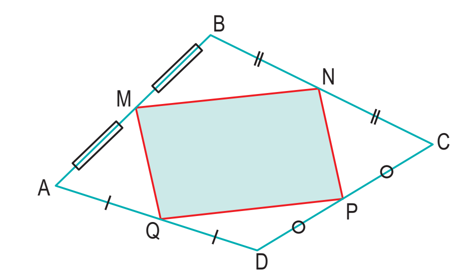
$\Rightarrow x = b - a$



$$x = \frac{b+d}{2} = \frac{a+c}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Paralelogramo de Varignon: en todo cuadrilátero cóncavo o convexo, los puntos medios de cada uno de los lados son los vértices de un paralelogramo al que se le denomina "paralelogramo de Varignon".

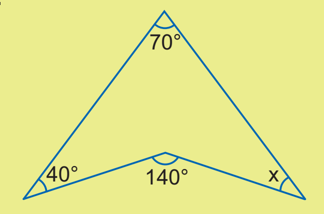




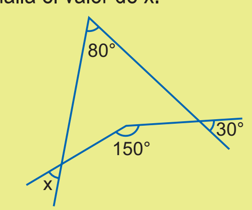
En ambos casos se cumple que $\overline{MN} // \overline{PQ}$ y $\overline{MQ} // \overline{NP}$, además $MN = QP$ y $MQ = NP$.

EFECTUAR

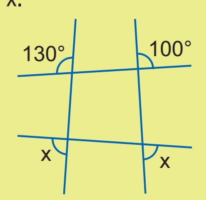
1. Calcula x.



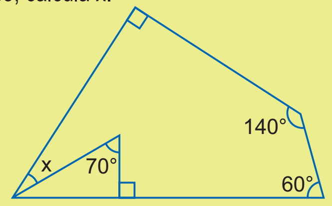
2. Del gráfico, halla el valor de x.



3. Halla el valor de x.



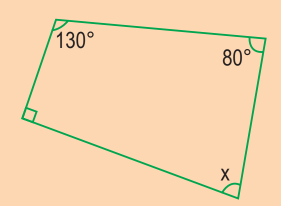
4. Del gráfico, calcula x.



Problemas resueltos



1 Según la figura, calcula x.

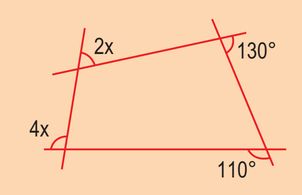


Resolución:

Sabemos que:

$130° + x + 90° + 80° = 360° \Rightarrow x = 60°$

2 Halla x.

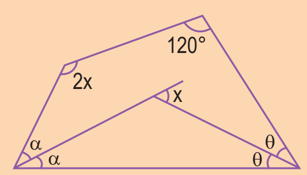


Resolución:

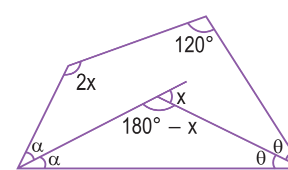
$2x + 4x + 130° + 110° = 360°$

$6x = 120° \Rightarrow x = 20°$

3 De la figura, calcula x.



Resolución:



De la figura:

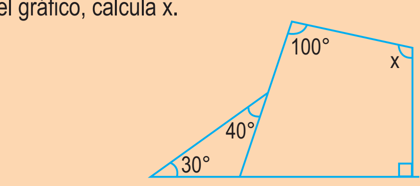
$$180° - x = \frac{2x + 120°}{2}$$

$$360° - 2x = 2x + 120°$$

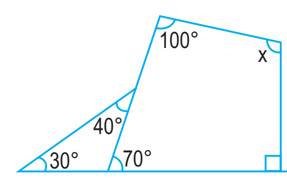
$$360° - 120° = 4x$$

$$240° = 4x \Rightarrow x = 60°$$

4 Del gráfico, calcula x.



Resolución:



Luego:

$$100° + 70° + 90° + x = 360°$$

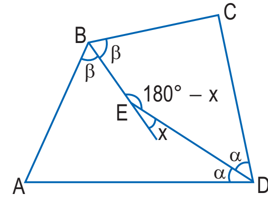
$$260° + x = 360°$$

$$x = 100°$$

5 En un cuadrilátero convexo ABCD, halla la medida del menor ángulo que forman las bisectrices de los ángulos B y D, si $m\angle C - m\angle A = 34°$.

Resolución:

Con los datos del enunciado, construimos el gráfico:



Del gráfico observamos que x es el menor ángulo que forman las bisectrices de los ángulos B y D.

En el ⩓ BEDA:

$180° - x = \alpha + \beta + m\angle A$ ...(1)

En el ⏢ABCD:

$2\alpha + 2\beta + m\angle A + m\angle C = 360°$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 180° - \dfrac{m\angle A + m\angle C}{2}$ ...(2)

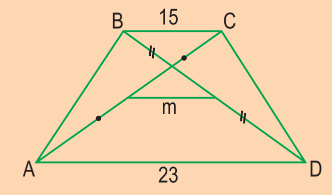
Reemplazando (2) en (1) y operamos:

$$180° - x = 180° - \frac{m\angle A + m\angle C}{2} + m\angle A$$

$$x = \frac{m\angle C - m\angle A}{2} \Rightarrow x = \frac{34°}{2} = 17°$$

Por lo tanto, el menor ángulo que forman las bisectrices de los ángulos B y D es 17°.

6 Sea ABCD un trapecio, halla el triple de m.



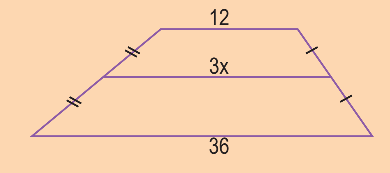
Resolución:

Por propiedad del trapecio:

$$m = \frac{23 - 15}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Nos piden: $3m = 3(4) = 12$

7 En el siguiente trapecio, halla x.



Resolución:

Observamos que 3x es la mediana del trapecio, entonces:

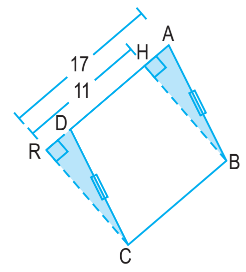
$$3x = \frac{36 + 12}{2}$$

$$x = \frac{48}{6} \Rightarrow x = 8$$

8 En un rombo ABCD, m∠A es menor que 90°, se trazan $\overline{BH}$ y $\overline{CR}$ perpendiculares a $\overline{AD}$ (H en $\overline{AD}$ y R en su prolongación). Halla HD, si AR = 17 y HR = 11.

Resolución:

Graficamos:



Del gráfico: ΔAHB ≅ ΔDRC

∴ AH = RD

Siendo:

AH = 17 – 11

AH = 6

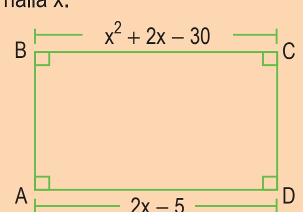
∴ RD = 6

Luego: DH = 11 – RD

⇒ DH = 11 – 6

∴ DH = 5

9 Según la figura; halla x.



Resolución:

Del gráfico: ABCD es rectángulo.

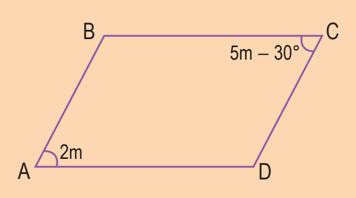
Se cumple: BC = AD

$x^2 + \cancel{2x} - 30 = \cancel{2x} - 5$

$x^2 = 25$

∴ x = 5

10 Sea ▱ABCD un romboide. Calcula m.



Resolución:

Por propiedad:

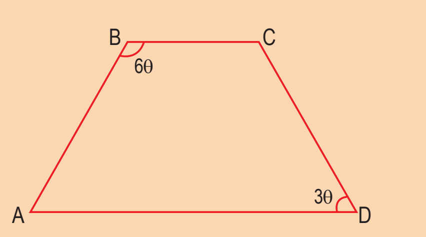
m∠A = m∠C

2m = 5m – 30

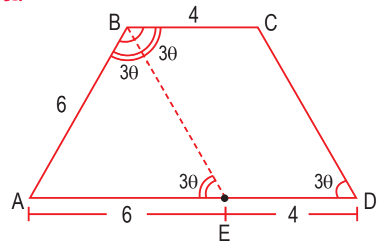
$\cancel{30} = \cancel{3}m$

∴ 10 = m

11 En la figura $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$; si: AB = 6 y BC = 4. Calcula AD.



Resolución:



Trazamos $\overline{BE}$ tal que:

$\overline{BE}$ // $\overline{CD}$

Se forma el ▱EBCD: Romboide

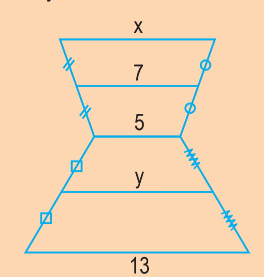
m∠CBE = 3θ

Luego: ΔABE(Isósceles)

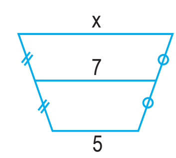
AE = 6

∴ AD = 10

12 De la figura, halla: x + y.

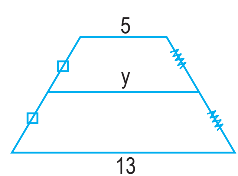


Resolución:



Por propiedad de base media:

$\frac{x+5}{2} = 7 \Rightarrow x = 9$



Por propiedad de base media:

$\frac{5+13}{2} = y \Rightarrow y = 9$

Entonces:

∴ x + y = 18

G CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Es el conjunto de puntos pertenecientes a un mismo plano, los cuales tienen la misma distancia con respecto a un único punto denominado centro de la circunferencia (O), y a la distancia constante de estos puntos al centro, se le llama radio de circunferencia (r).

- El punto "O" es el centro de la circunferencia, la misma que está conformada por la unión de todos los puntos $P_1; P_2; P_3; P_4; P_5; ...; P_n$.
- La distancia que hay entre O a cualquiera de los otros puntos ($P_1; P_2; ...; P_n$) es la misma e igual al radio:

  $\Rightarrow OP_1 = OP_2 = OP_3 = OP_4 = ... = OP_n = r$

P_4 P_3 P_2 P_1 P_n O r r r r

Importante

El círculo: es una porción de plano conformado por una circunferencia y la región interna que esta limita.

Circunferencia
Región interna

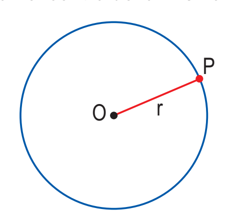
Circunferencia +
Región interna
Círculo



ELEMENTOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

A) Radio

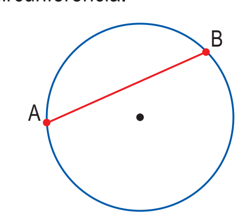
Es aquel segmento que une un punto de la circunferencia con el centro de la misma.



$\overline{OP}$: radio(r).

B) Cuerda

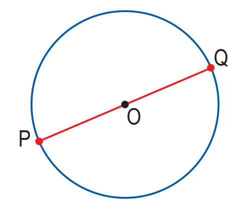
Es aquel segmento que une dos puntos distintos de una circunferencia.



$\overline{AB}$: cuerda.

C) Diámetro (cuerda máxima)

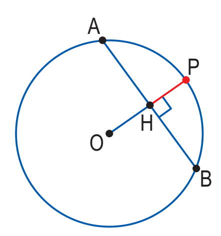
Es aquella cuerda que contiene al centro de la circunferencia; además, el diámetro es el doble del radio.



$\overline{PQ}$: diámetro, $PQ = 2(OP)$.

D) Sagita (flecha)

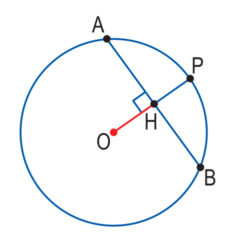
Es aquella porción de un radio perpendicular a una cuerda que está comprendida entre la cuerda y la circunferencia.



$\overline{HP}$: Sagita.

E) Apotema

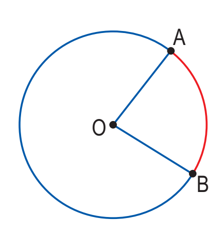
Es aquella porción de un radio perpendicular a una cuerda que está comprendida entre la cuerda y el centro.



$\overline{OH}$: Apotema.

F) Arco

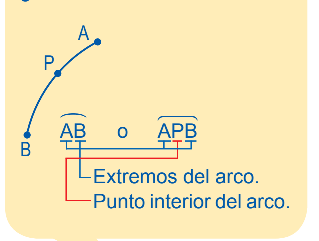
Es aquella porción de circunferencia limitada por dos puntos distintos de dicha circunferencia.



$\overset{\frown}{AB}$: Arco.

Atención

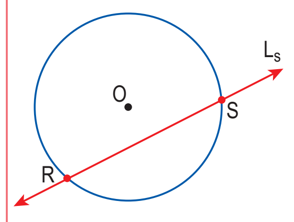
Un arco, dependiendo de sus extremos y de los puntos que contenga, adquiere las siguientes notaciones:





G) Recta secante

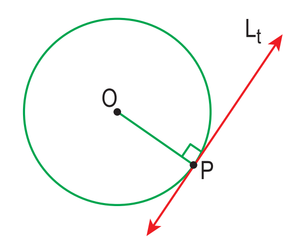
Es aquella recta que interseca a la circunferencia en dos puntos diferentes.



$\overleftrightarrow{L_s}$: recta secante.
Circunferencia $\cap \overleftrightarrow{L_s} = \{R; S\}$

H) Recta tangente

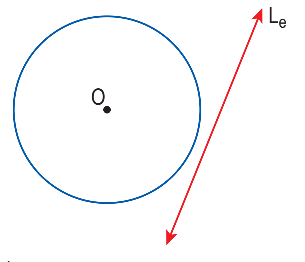
Es aquella recta que interseca a la circunferencia solamente en un punto.



$\overleftrightarrow{L_t}$: recta tangente.
Circunferencia $\cap \overleftrightarrow{L_t} = P$

I) Recta exterior

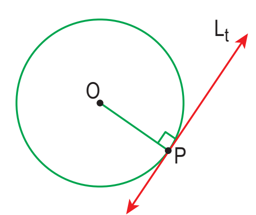
Es aquella recta que no interseca, ni ella, ni sus prolongaciones a la circunferencia.



$\overleftrightarrow{L_e}$: recta exterior.
Circunferencia $\cap \overleftrightarrow{L_e} = \varnothing$

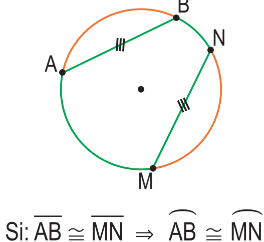
PROPIEDADES FUNDAMENTALES

I. Una recta tangente será perpendicular al radio que pase por el punto de tangencia.



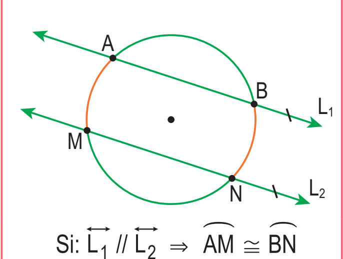
SI: OP = radio ⇒ $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{L_t}$

II. En una circunferencia dos cuerdas congruentes determinan dos arcos congruentes.



Si: $\overline{AB} \cong \overline{MN} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{MN}$

III. Dos rectas secantes y paralelas determinan en una circunferencia dos arcos congruentes.

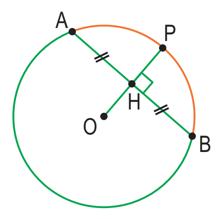


Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow \overset{\frown}{AM} \cong \overset{\frown}{BN}$

IV. Una recta tangente y otra secante paralelas, determinan en una circunferencia dos arcos congruentes.

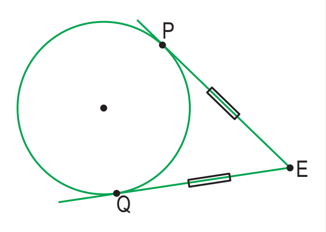
Si: $\overline{AB} // \overleftrightarrow{L_t} \Rightarrow \overset{\frown}{BP} \cong \overset{\frown}{AP}$

V. Todo radio perpendicular a una cuerda biseca a esta y al arco que dicha cuerda determina.



Si: OP = radio y $\overline{OP} \perp \overline{AB}$
$\Rightarrow \overline{AH} \cong \overline{HB}$ y $\overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{PB}$

VI. Dos segmentos tangentes trazados desde un mismo punto exterior son congruentes.



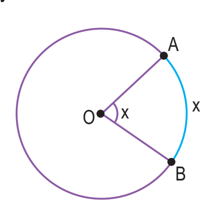
Si P y Q son puntos de tangencia.
$\Rightarrow \overline{PE} \cong \overline{QE}$

ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

Los ángulos y los arcos presentes en una circunferencia se relacionan de la siguiente manera:

A) Ángulo central

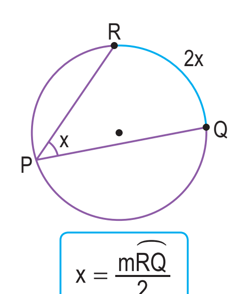
Es aquel que tiene como vértice al centro de la circunferencia y como lados a dos radios.



$x = m\overset{\frown}{AB}$

B) Ángulo inscrito

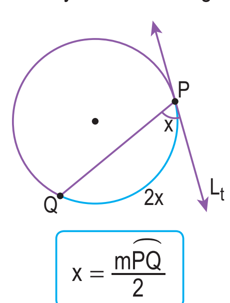
Es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.



$x = \dfrac{m\overset{\frown}{RQ}}{2}$

C) Ángulo semiinscrito

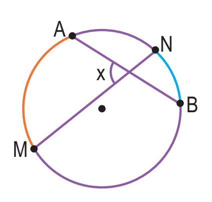
Es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son una cuerda y una recta tangente.



$x = \dfrac{m\overset{\frown}{PQ}}{2}$

D) Ángulo interior

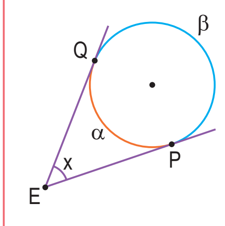
Es aquel cuyo vértice es el punto de intersección de dos cuerdas que no comparten alguno de sus extremos.



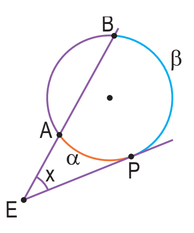
$x = \dfrac{m\overset{\frown}{AM} + m\overset{\frown}{NB}}{2}$

E) Ángulo exterior

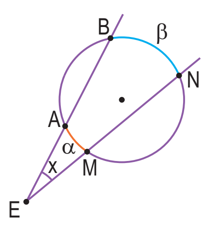
Es aquel cuyo vértice es un punto externo a la circunferencia y cuyos lados pueden ser dos rectas secantes, dos rectas tangentes o una recta secante y otra tangente.



$x = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$



$x = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$

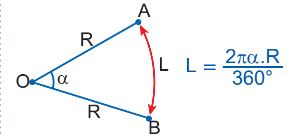


$x = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$

Nota

Medida del arco: un arco es una porción de circunferencia, por lo tanto, posee dos maneras de ser medido, una longitudinalmente y otra angularmente.

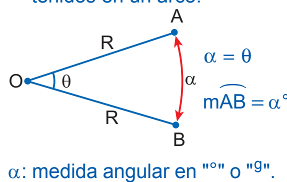
- **Medida longitudinal del arco**
  Es la longitud contenida en un arco.



$L = \dfrac{2\pi\alpha.R}{360°}$

L: longitud de arco en m o cm.

- **Medida angular del arco**
  Es una porción de los 360° (de la circunferencia) contenidos en un arco.



$\alpha = \theta$

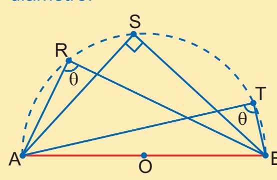
$m\overset{\frown}{AB} = \alpha°$

α: medida angular en "°" o "g".



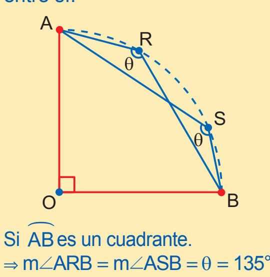
Observación

Semicircunferencia
Es aquel arco cuyos extremos son los extremos de un diámetro.



Si $\overset{\frown}{AB}$ es una semicircunferencia.
$\Rightarrow m\angle ARB = m\angle ATB = \theta = 90°$

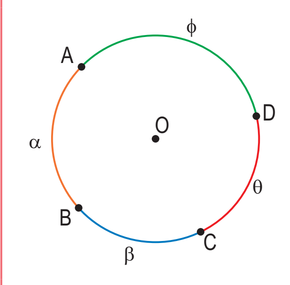
Cuadrante
Es aquel arco determinado por dos radios perpendiculares entre sí.



Si $\overset{\frown}{AB}$ es un cuadrante.
$\Rightarrow m\angle ARB = m\angle ASB = \theta = 135°$

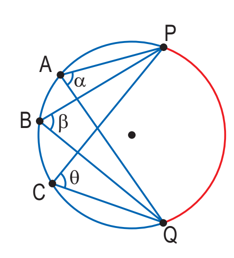
PROPIEDADES ANGULARES

I. Los arcos que conforman una circunferencia suman 360° correspondientes a una vuelta.



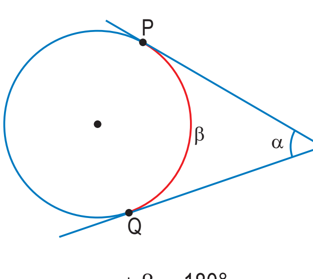
$\alpha + \beta + \theta + \phi = 360°$

II. El arco que corresponde a infinitos ángulos inscritos se le denomina **arco capaz.**



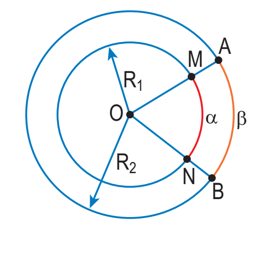
$\alpha = \beta = \theta = \dfrac{m\overset{\frown}{PQ}}{2}$

III. Un ángulo exterior formado por dos tangentes y el menor arco que estas determinan, suman 180°.



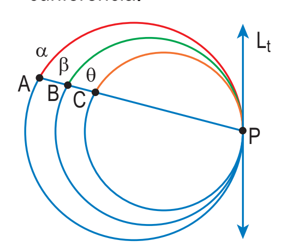
$\alpha + \beta = 180°$

IV. La medida angular de un arco no depende del tamaño de la circunferencia a la que pertenece.



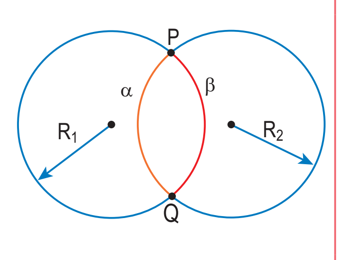
$m\overset{\frown}{MN} = m\overset{\frown}{AB}$ o $\alpha = \beta$

V. Un arco determinado por un ángulo semiinscrito tendrá la misma medida angular a pesar del tamaño de su circunferencia.



Si P es tangente común.
$\Rightarrow \alpha = \beta = \theta$

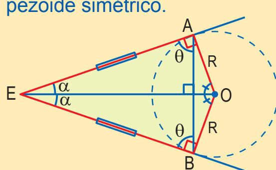
VI. Si dos circunferencias congruentes se intersecan, determinarán en ambos arcos congruentes.



Si: $R_1 = R_2 \Rightarrow \alpha = \beta$

Observación

Dos rectas tangentes a una circunferencia originan un trapezoide simétrico.



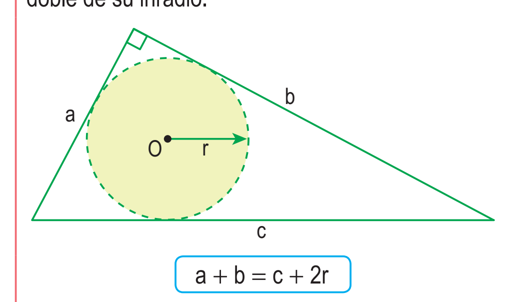
Por propiedad sabemos que:
$\overline{EA} \cong \overline{EB}$ y $OA = OB = R$.
$\therefore$ ⏥EAOB es un trapezoide simétrico $\Rightarrow \overline{EO} \perp \overline{AB}$.
además: $m\angle EAB = m\angle EBA = \theta$



TEOREMAS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

A) Teorema de Poncelet

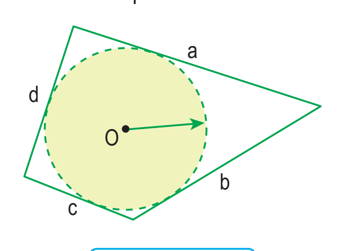
En un triángulo rectángulo se cumple que la suma de sus catetos es igual a su hipotenusa más el doble de su inradio.



$a + b = c + 2r$

B) Teorema de Pitot

En un cuadrilátero circunscrito se cumple que la suma de sus lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados opuestos.



$a + c = b + d$

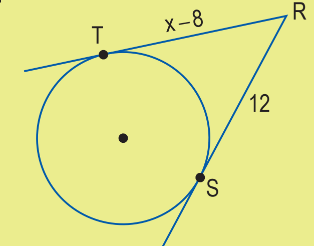
Atención

Cuando todos los lados de un triángulo o cuadrilátero son tangentes a una única circunferencia se denomina a estos como triángulo o cuadrilátero circunscrito.

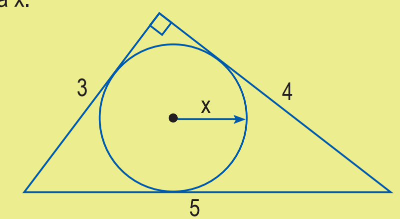


EFECTUAR

1. Halla x.



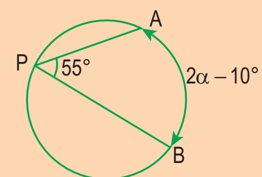
2. Halla x.



Problemas resueltos



1 Halla α en la siguiente circunferencia.



Resolución:

Por propiedad de ángulo inscrito:

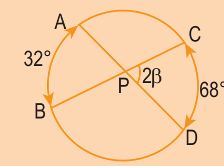
$$m\angle APB = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow 55° = \frac{2\alpha - 10°}{2}$$

$$110° = 2\alpha - 10°$$

$$\therefore \alpha = 60°$$

2 Halla β en la siguiente circunferencia.



Resolución:

Por propiedad de ángulo interior:

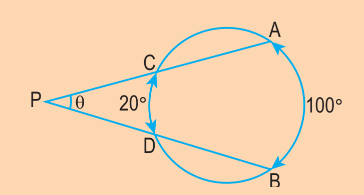
$$m\angle CPD = \frac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$2\beta = \frac{32° + 68°}{2}$$

$$4\beta = 100°$$

$$\therefore \beta = 25°$$

3 Halla θ.



Resolución:

Por ángulo exterior:

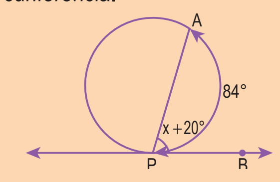
$$m\angle APB = \frac{m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$\theta = \frac{100° - 20°}{2}$$

$$2\theta = 80°$$

$$\therefore \theta = 40°$$

4 Halla x en la circunferencia.



Resolución:

Por propiedad de ángulo semiinscrito:

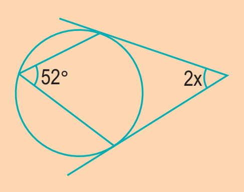
$$m\angle APB = \frac{m\overset{\frown}{AP}}{2}$$

$$x + 20° = \frac{84°}{2}$$

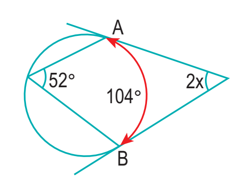
$$x + 20° = 42°$$

$$\therefore x = 22°$$

5 Halla x.



Resolución:



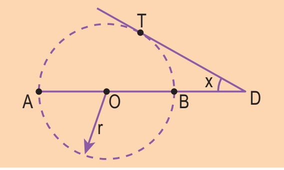
Sabemos que $m\overset{\frown}{AB} = 104°$

$\Rightarrow 2x + 104° = 180°$

$2x = 76°$

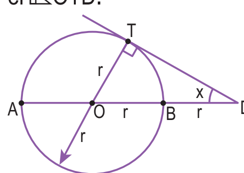
$\therefore x = 38°$

6 Calcula x, si BD = r y T es punto de tangencia.



Resolución:

Trazamos el radio OT, por propiedad $\overline{OT} \perp \overline{TD}$, entonces se forma el ⊿OTD.



Por dato: BD = r, además

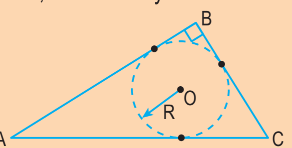
OB = OT = r, entonces: OD = 2r

El ⊿ OTD es notable

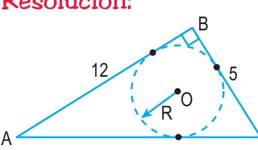
de 30° y 60°

$\Rightarrow x = 30°$

7 En la figura; calcula R, si AB = 12 y BC = 5.



Resolución:



Reemplazando:

$12 + 5 = AC + 2R$

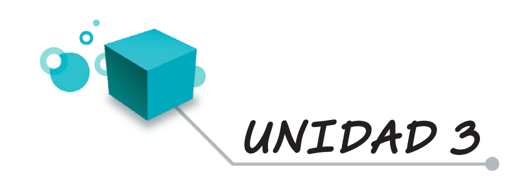
$17 = AC + 2R$ ... (I)

Luego calculamos AC usando el teorema de Pitágoras:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

reemplazando $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} \Rightarrow AC = 13$, reemplazando en (I).

$17 = 13 + 2R \Rightarrow R = 2$

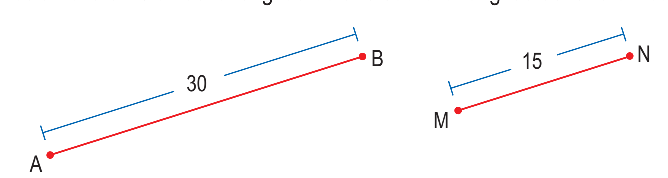




PROPORCIONALIDAD

RAZÓN GEOMÉTRICA

Una razón geométrica viene a ser el resultado de la comparación de las longitudes de dos segmentos rectilíneos, mediante la división de la longitud de uno sobre la longitud del otro o viceversa.

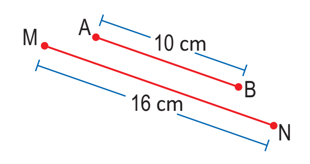


La razón geométrica entre $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ será: $\frac{AB}{MN} = \frac{30}{15} = 2$

$\therefore$ AB es igual a 2 veces MN.

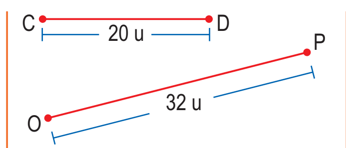
PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Una proporción geométrica es el conjunto de dos o más pares de segmentos rectilíneos que poseen una misma razón geométrica.



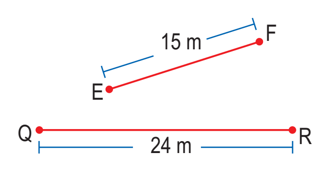
Razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$:

$\frac{AB}{MN} = \frac{10\text{ cm}}{16\text{ cm}} = \frac{5}{8}$



Razón entre $\overline{CD}$ y $\overline{OP}$:

$\frac{CD}{OP} = \frac{20\text{ u}}{32\text{ u}} = \frac{5}{8}$



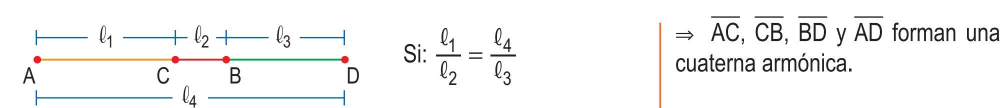
Razón entre $\overline{EF}$ y $\overline{QR}$:

$\frac{EF}{QR} = \frac{15\text{ m}}{24\text{ m}} = \frac{5}{8}$

Vemos que $\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{OP} = \frac{EF}{QR} = \frac{8}{5} \Rightarrow$ las razones $\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{OP} = \frac{EF}{QR}$ son proporcionales.

CUATERNA ARMÓNICA

Cuando un segmento de recta AB es dividido interiormente por el punto C y en su prolongación por el punto D, determinando así cuatro segmentos, que forman la proporción geométrica: $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$; entonces dichos segmentos constituyen una cuaterna armónica.



Si: $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_4}{\ell_3}$

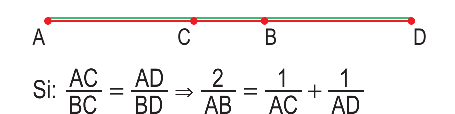
$\Rightarrow$ $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{AD}$ forman una cuaterna armónica.

$\therefore$ Se dice que los puntos C y D dividen "armónicamente" al segmento AB.

Relaciones asociadas a la cuaterna armónica

Relación de Descartes

Si dos puntos C y D dividen armónicamente a un segmento AB, se cumple que el doble de la inversa de AB es igual a la suma de los inversos de AC y AD.



Si: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

Relación de Newton

Si dos puntos C y D dividen armónicamente a un segmento AB, cuyo punto medio es O; se cumple que el producto de OC y OD es igual al cuadrado de OA.

A O C B D

Si: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \wedge \overline{AO} \cong \overline{OB} \Rightarrow (OA)^2 = (OC)(OD)$

Ejemplo:

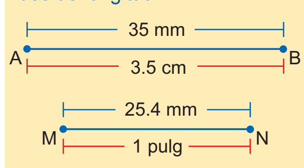
Si los puntos M y N dividen al segmento PQ armónicamente, hallar PM si: PN = 5QN y MQ = 3.

Resolución:

Graficamos: P —x— M —3— Q .... N $\Rightarrow \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{QN}$; Reemplazando: $\frac{x}{3} = \frac{5QN}{QN} \Rightarrow x = 15$

Atención

Los valores de los segmentos de recta que se dividen para hallar una razón geométrica deben tener las mismas unidades de longitud.



Para hallar la razón geométrica entre $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ tendremos:

$\frac{AB}{MN} = \frac{35\text{ mm}}{25,4\text{ mm}}$ } mismas unidades(✓) CORRECTO

$\frac{AB}{MN} = \frac{3,5\text{ cm}}{1\text{ pulg}}$ } diferentes unidades(x) INCORRECTO

Observación

Una proporción geométrica tal como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tiene las siguientes propiedades:

I. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \wedge \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$

II. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \wedge \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Nota

A una **cuaterna armónica** también se le llama **Proporción armónica**.



Atención

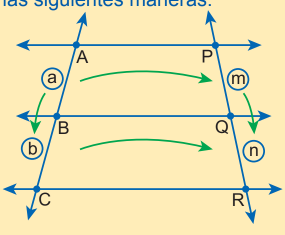
Si dos puntos C y D dividen armónicamente a un segmento AB, entonces dichos puntos se denominaron **conjugados armónicos** de A y B.

A C B D

Si: $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow$ C y D son los conjugados armónicos de A y B.

El **teorema de Thales** también puede ser interpretado de las siguientes maneras:



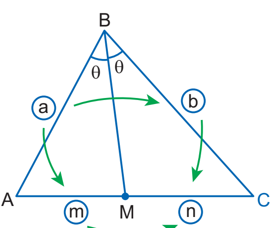
Si: $\overline{AP}//\overline{BQ}//\overline{CR}$; entonces:

I. $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ o II. $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$



Nota

El **teorema de la bisectriz interior** también puede ser interpretado de la siguiente manera:

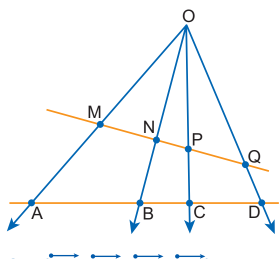


Si: $\overline{BM}$ es bisectriz interior:

I. $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ o II. $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$

Nota

Un haz armónico es el conjunto de cuatro rayos que tienen el mismo origen y que determinan sobre cualquier recta transversal a ellos, una cuaterna armónica.



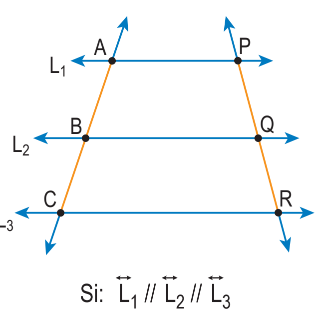
Si: $\{\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}\}$ es un haz armónico.

$\Rightarrow \frac{MN}{NP}=\frac{MQ}{PQ}$ y $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$

TEOREMAS DE PROPORCIONALIDAD

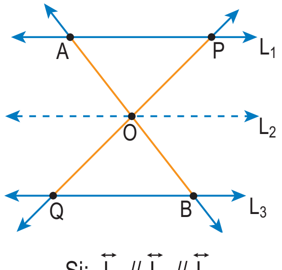
Teorema de Thales

El teorema de Thales dice que tres o más rectas paralelas determinan sobre dos rectas secantes, segmentos respectivamente proporcionales.



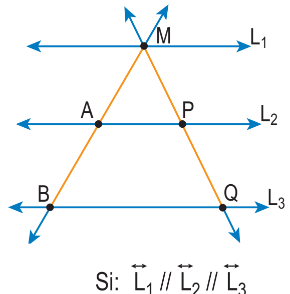
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}$



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

$\Rightarrow \frac{AO}{OB}=\frac{PO}{OQ}$

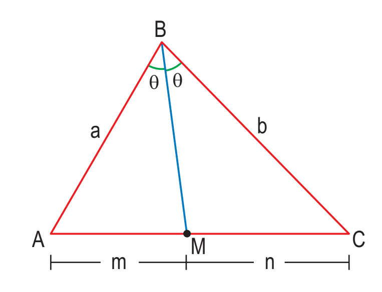


Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

$\Rightarrow \frac{MA}{AB}=\frac{MP}{PQ}$

Teorema de la bisectriz interior

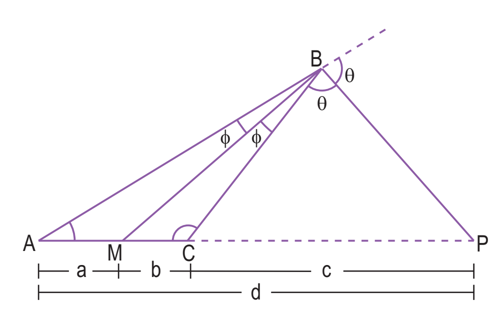
En todo triángulo la bisectriz interior de cualquiera de sus ángulos divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.



Se cumple: $\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MC}$ o $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$

Teorema de las bisectrices

En un triángulo la bisectriz de un ángulo interno y la bisectriz del ángulo externo adyacente a este dividen "armónicamente", es decir, en una **cuaterna armónica** al lado opuesto a dicho ángulo.



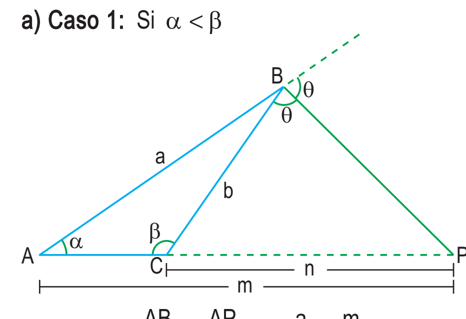
Si $\overline{BM}$ y $\overline{BP}$ son una bisectriz interior y una bisectriz exterior respectivamente y además: $m\angle BAC \neq m\angle BCA$ $(AB \neq BC)$.

Se cumple: $\frac{AM}{MC}=\frac{AP}{CP}$ o $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$

Teorema de la bisectriz exterior

La bisectriz exterior de un triángulo divide externamente a la prolongación del lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz. Existen tres casos:

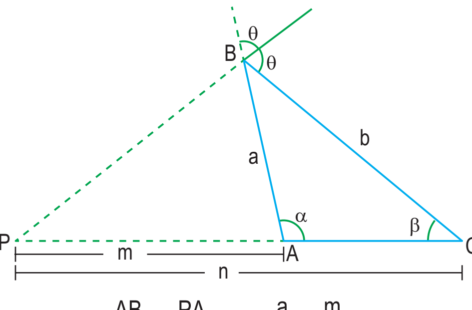
a) Caso 1: Si $\alpha < \beta$



Se cumple: $\frac{AB}{BC}=\frac{AP}{CP}$ o $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$

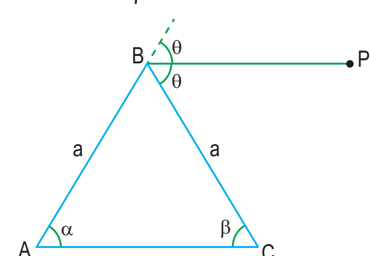


b) Caso 2: Si $\alpha > \beta$



Se cumple: $\frac{AB}{BC}=\frac{PA}{PC}$ o $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$

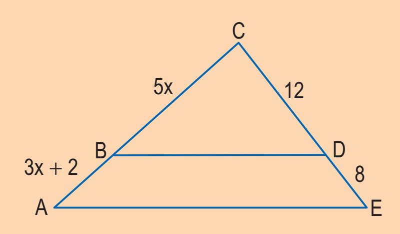
c) Caso 3: Si $\alpha=\beta=\theta$



Se cumple: $\overline{BP} // \overline{AC}$ $\therefore$ $\nexists$ proporción.

Problemas resueltos

1 Calcula x, si $\overline{BD} // \overline{AE}$.

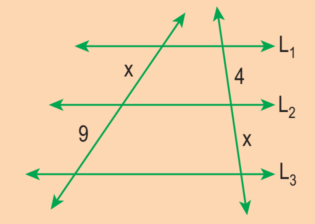


Resolución:

Por el teorema de Thales:

$$\frac{5x}{3x+2} = \frac{12}{8} \Rightarrow 40x = 36x + 24$$
$$4x = 24$$
$$\therefore x = 6$$

2 Calcula x, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$.

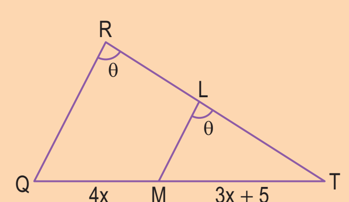


Resolución:

Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$, entonces, por el teorema de Thales:

$$\frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \quad \therefore x = 6$$

3 Halla x, si 5RL = 4LT.



Resolución:

Del dato:

5RL = 4LT

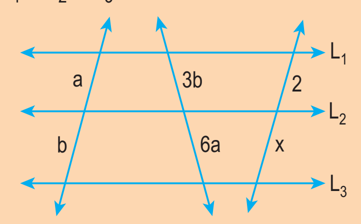
$$\Rightarrow \frac{RL}{LT} = \frac{4}{5}$$

Del gráfico:

$$\frac{4x}{3x+5} = \frac{RL}{LT} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 20x = 12x + 20$$
$$8x = 20$$
$$x = 2,5$$

4 En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$, calcula x.



Resolución:

Por teorema de Thales:

$$\frac{a}{b} = \frac{3b}{6a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{... (I)}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{6a}{3b} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{a}{b} \quad \text{... (II)}$$

Igualamos (I) y (II):

$$\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

5 En la figura mostrada los puntos U, N, I, L forman una cuaterna armónica. Halla x.

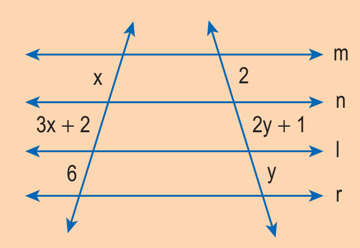


Resolución:

Por ser cuaterna armónica:

$$\frac{3}{2} = \frac{3+2+x}{x} \Rightarrow 3x = 2x + 10$$
$$x = 10$$

6 Si $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n} // \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{r}$, halla x.



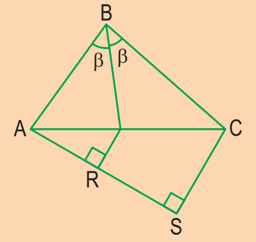
Resolución:

Por el teorema de Thales:

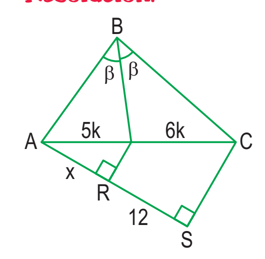
$$\frac{x}{6} = \frac{2}{y} \Rightarrow xy = 12$$

$$\frac{x}{3x+2} = \frac{2}{2y+1} \Rightarrow 6x + 4 = 2xy + x$$
$$5x + 4 = 2(12)$$
$$\therefore x = 4$$

7 Si: $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{6}$ y RS = 12. Calcula AR.



Resolución:



Por el teorema de Thales:

$$\frac{x}{12} = \frac{5k}{6k}$$
$$x = 10$$

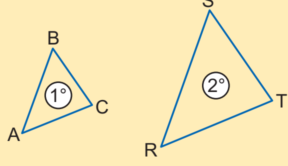
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



Observación

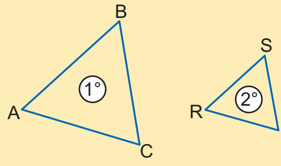
Constante de proporcionalidad (k):
Es un factor numérico que indica la relación que existe entre los elementos longitudinales de dos figuras geométricas semejantes; en este caso, triángulos:

- Si **k** < **1** ⇒ Los elementos del segundo triángulo son mayores que los del primero:



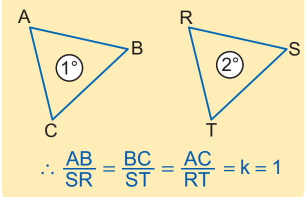
$\therefore \frac{AB}{SR} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k < 1$

- Si **k** > **1** ⇒ los elementos del segundo triángulo son menores que los del primero:



$\therefore \frac{AB}{SR} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k > 1$

- Si **k** = **1** ⇒ los elementos de ambos triángulos son congruentes:



$\therefore \frac{AB}{SR} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k = 1$

Nota

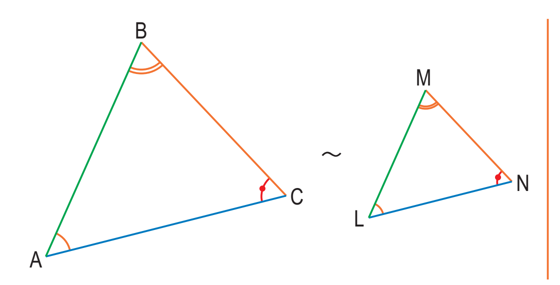
La interpretación de la notación de una semejanza entre dos triángulos es:
(Si el ΔABC y el ΔRST son semejantes)

1. ΔABC ~ ΔRST ⇒ $\frac{AB}{RS} = k$
2. ΔABC ~ ΔRST ⇒ $\frac{BC}{ST} = k$
3. ΔABC ~ ΔRST ⇒ $\frac{AC}{RT} = k$

$\therefore \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k$

DEFINICIÓN

Se dice que dos triángulos son semejantes cuando ambos poseen ángulos internos respectivamente congruentes, además de que sus lados correspondientes son proporcionales.



Si: ∠A ≅ ∠L; ∠B ≅ ∠M; ∠C ≅ ∠N

y $\frac{AB}{LM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{LN} = K$

⇒ El ΔABC y el ΔLMN son semejantes (~).

Notación: ΔABC ~ ΔLMN

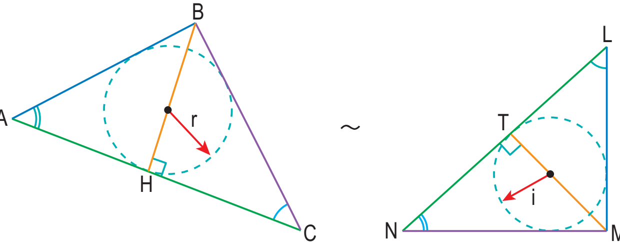
Se lee: "El ΔABC es semejante al ΔLMN".

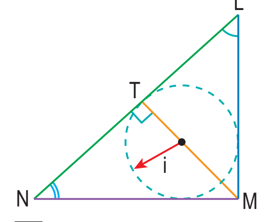
Los lados homólogos de dos triángulos semejantes son aquellos que se oponen a los ángulos congruentes.

Del gráfico: el lado $\overline{AB}$ es homólogo al lado $\overline{LM}$, el lado $\overline{BC}$ es homólogo al lado $\overline{MN}$ y el lado $\overline{AC}$ es homólogo al lado $\overline{LN}$.

Proporcionalidad de elementos homólogos

Los elementos homólogos de dos triángulos semejantes, tales como sus alturas, su perímetro, su inradio o circunradio guardan la misma proporción que sus lados.





$\overline{BH}$: altura del ΔABC.
r: inradio del ΔABC.
2p: perímetro del ΔABC.

$\overline{MT}$: altura del ΔLMN.
I: inradio del ΔLMN.
2q: perímetro del ΔLMN.

Si: ΔABC ~ ΔNML, entonces sus lados homólogos son proporcionales.

$\frac{AB}{NM} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{NL} = k$

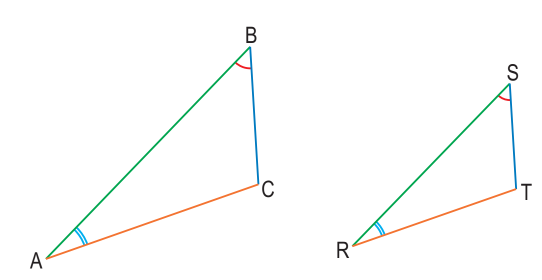
∴ Sus elementos homólogos también son proporcionales:

$\Rightarrow \frac{BH}{MT} = \frac{r}{i} = \frac{2p}{2q} = k$

k: constante de proporcionalidad.

CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

A) **Primer caso:** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

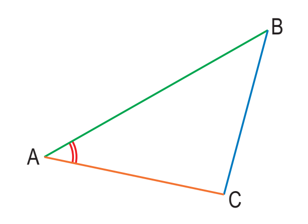


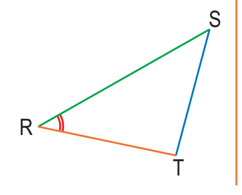
Si: ∠A ≅ ∠R y ∠B ≅ ∠S

⇒ ΔABC ~ ΔRST

$\therefore \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k$

B) **Segundo caso:** Si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo de otro triángulo y los lados que comprenden al ángulo en el primer triángulo son respectivamente proporcionales a los lados que comprenden al ángulo en el segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.



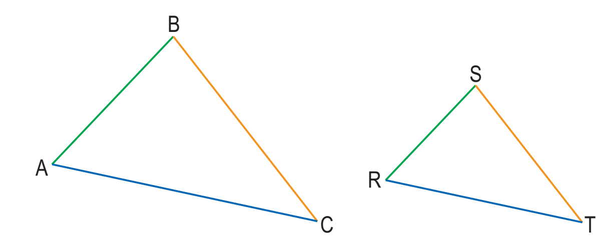


Si: ∠A ≅ ∠R y $\frac{AB}{RS} = \frac{AC}{RT}$

⇒ ΔABC ~ ΔRST

$\therefore \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k$

C) **Tercer caso:** Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.



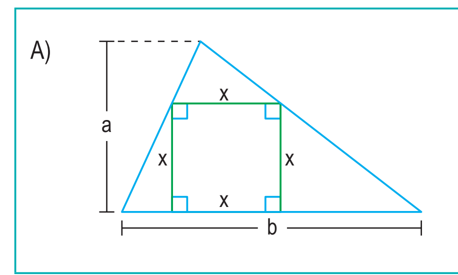
$$\text{Si } \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle RST$$

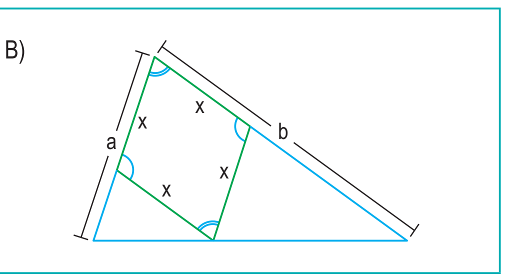
$$\therefore \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = k$$

Propiedades de semejanza

A)

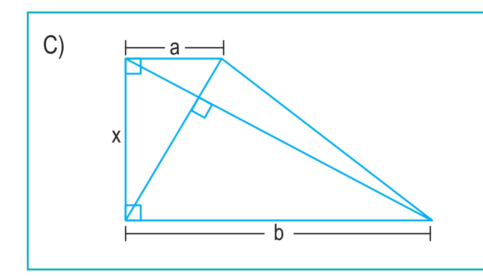


B)

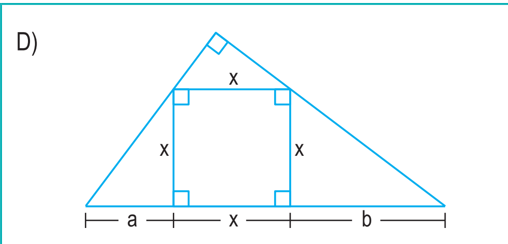


En ambos casos (A y B) se cumple que: $x = \dfrac{ab}{a+b}$

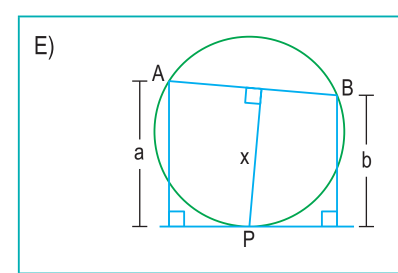
C)



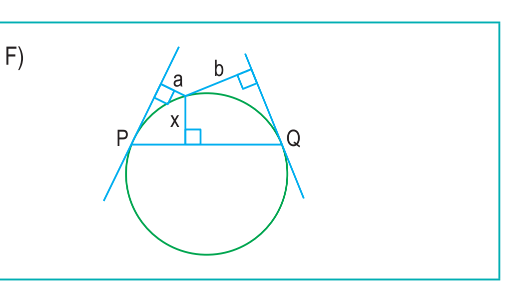
D)



E)



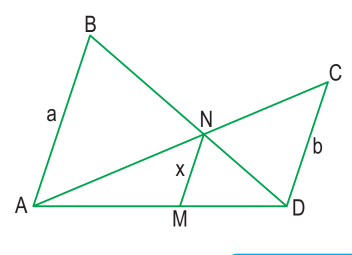
F)



En los casos (C, D, E y F) se cumple que $x = \sqrt{ab}$

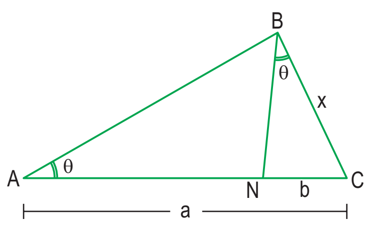
TEOREMAS DE SEMEJANZA

I. Dos triángulos con un lado común, dos lados paralelos y dos lados secantes, cumplen la siguiente relación:



Si: $\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \,//\, \overline{MN} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{ab}{a+b}}$

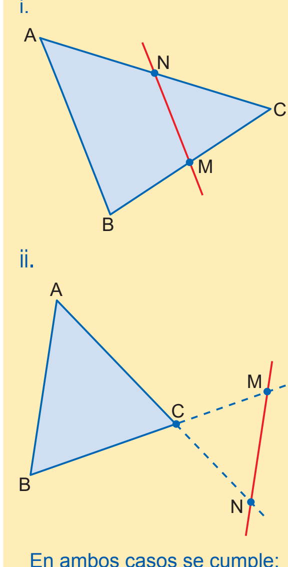
II. Un triángulo cuyo lado forma un ángulo con una ceviana de tal manera que es congruente con el ángulo opuesto a dicho lado, cumple la siguiente relación:



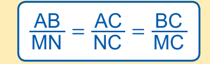
Si: $\angle BAC \cong \angle CBN \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{ab}}$

Atención

Toda recta paralela al lado de un triángulo y secante a los otros dos lados o sus prolongaciones, determina un triángulo semejante al primero.




En ambos casos se cumple:

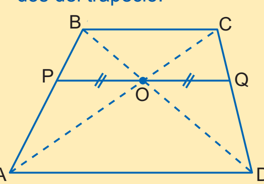


$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{NC} = \frac{BC}{MC}$$



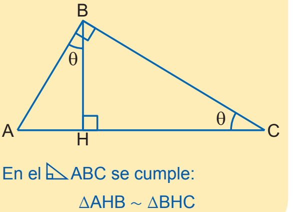
Observación

- El punto de intersección de las diagonales de un trapecio biseca al segmento que pasa por dicho punto, es paralelo a las bases y esta comprendidos entre los lados del trapecio.



Si $\overline{PQ} \,//\, \overline{AD} \,//\, \overline{BC} \Rightarrow \overline{PO} \cong \overline{OQ}$

- La altura de un triángulo rectángulo divide al mismo en dos triángulos semejantes entre sí.

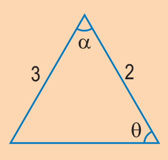


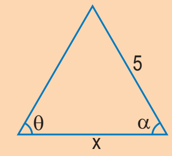
En el ◺ABC se cumple:

$\triangle AHB \sim \triangle BHC$

Problemas resueltos

1 Calcula x, si los triángulos son semejantes:



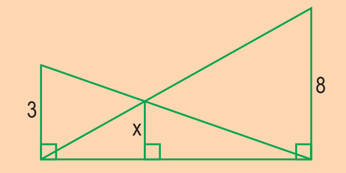


Resolución:

Por semejanza de triángulos:

$\frac{3}{2} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

2 Halla x.

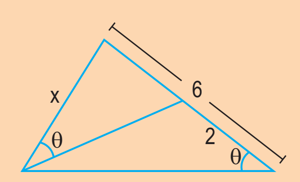


Resolución:

Por propiedad:

$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{11}{24} \quad \therefore x = \frac{24}{11}$

3 Halla x.

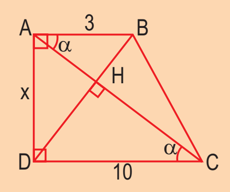


Resolución:

Por propiedad:

$x^2 = 6(4) \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$

4 Halla la altura del trapecio, sabiendo que AB = 3 y CD = 10.



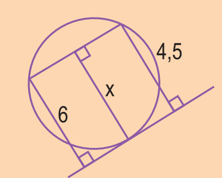
Resolución:

Veamos que: ◺ADC ~ ◺BAD

Entonces:

$\frac{10}{x} = \frac{x}{3} \Rightarrow x^2 = 30 \quad \therefore x = \sqrt{30}$

5 Halla x.

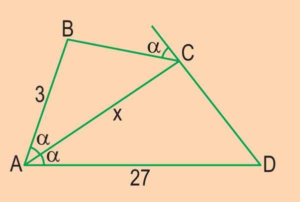


Resolución:

Por propiedad:

$x = \sqrt{(6)(4,5)} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$

6 Calcula.



Resolución:

Del gráfico:

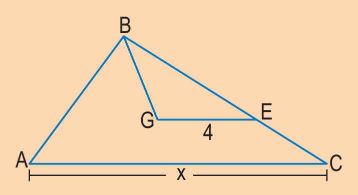
$m\angle ACB = m\angle ADC$

Luego: $\triangle ABC \sim \triangle ACD$

Entonces:

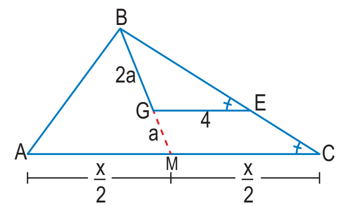
$\frac{x}{27} = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = 81 \quad \therefore x = 9$

7 En el triángulo, G baricentro y $\overline{GE} // \overline{AC}$. Calcula x.



Resolución:

Trazamos la mediana $\overline{BM}$:



$\triangle BGE \sim \triangle BMC$

G baricentro: BG = 2GM

Luego:

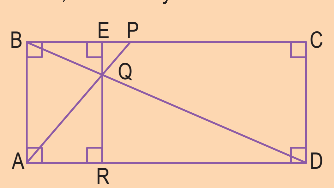
$\frac{GE}{CM} = \frac{BG}{BM}$

$\frac{4}{\frac{x}{2}} = \frac{2a}{3a}$

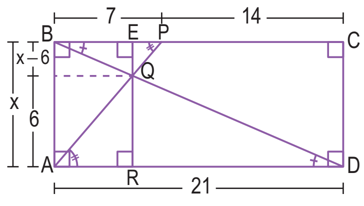
$\frac{8}{x} = \frac{2}{3}$

$\therefore x = 12$

8 De la figura, PC = 14; AD = 21 y QR = 6. Halla el lado AB.



Resolución:



Se observa:

$\triangle BQP \sim \triangle DQA$

$\frac{AD}{BP} = \frac{QR}{QE} \Rightarrow \frac{21}{7} = \frac{6}{x-6} \quad \therefore x = 8$

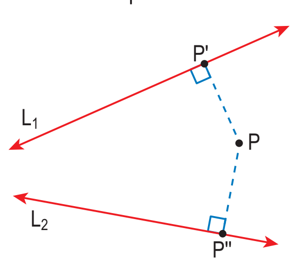


RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO

La proyección ortogonal de un punto respecto a una recta vendría a ser el pie de la altura o perpendicular trazada desde dicho punto a la recta.



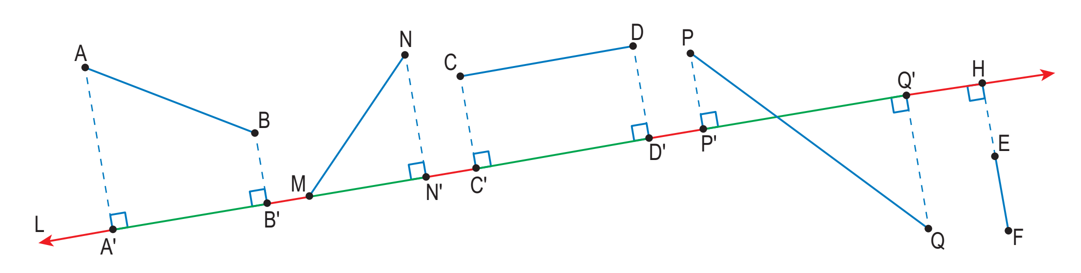
Si proyectamos P sobre $\overleftrightarrow{L_1}$ y también sobre $\overleftrightarrow{L_2}$, obtenemos:

- P': proyección de P sobre $\overleftrightarrow{L_1}$, por lo tanto $\overline{PP'} \perp \overleftrightarrow{L_1}$.
- P'': proyección de P sobre $\overleftrightarrow{L_2}$, por lo tanto $\overline{PP''} \perp \overleftrightarrow{L_2}$.
- $\overline{PP'}$: proyectante de P respecto a $\overleftrightarrow{L_1}$ ($P' \in \overleftrightarrow{L_1}$).
- $\overline{PP''}$: proyectante de P respecto a $\overleftrightarrow{L_2}$ ($P'' \in \overleftrightarrow{L_2}$).
- $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$: ejes de proyección.

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN SEGMENTO

La proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es la reunión de todas las proyecciones de los puntos que conforman a dicho segmento sobre una recta dada.

Para determinar la proyección de un segmento sobre una recta solo basta con proyectar sus extremos, de esta manera el segmento contenido entre las proyecciones de sus extremos vendría a ser la proyección del segmento dado.

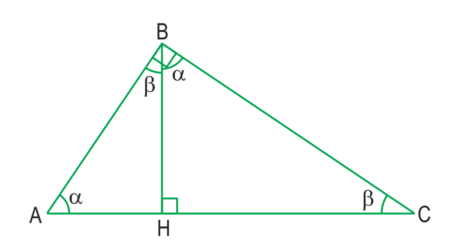


Proyectamos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{FE}$ sobre la recta L, y obtenemos:

- $\overline{A'B'}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$, además: $\overline{AA'} \perp \overleftrightarrow{L}$ y $\overline{BB'} \perp \overleftrightarrow{L}$.
- $\overline{MN'}$: proyección ortogonal de $\overline{MN}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$, además: $M \in \overleftrightarrow{L}$ y $\overline{NN'} \perp \overleftrightarrow{L}$.
- $\overline{C'D'}$: proyección ortogonal de $\overline{CD}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$, además: $\overline{CD} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ y $\overline{CC'} \cong \overline{DD'}$.
- $\overline{P'Q'}$: proyección ortogonal de $\overline{PQ}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$, además: $\overline{PP'} \perp \overleftrightarrow{L}$ y $\overline{Q'Q} \perp \overleftrightarrow{L}$.
- H: proyección ortogonal de $\overline{FE}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$, además: $\overline{EF} \perp \overleftrightarrow{L}$.

RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En todo triángulo rectángulo, la altura relativa a su hipotenusa determina dos triángulos que son semejantes al triángulo rectángulo dado.



En el ⊿ABC tenemos:

$\overline{AB}$: cateto menor.

$\overline{BC}$: cateto mayor.

$\overline{BH}$: altura relativa a la hipotenusa ($\overline{AC}$).

$\overline{AC}$: hipotenusa.

$\overline{AH}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

$\overline{HC}$: proyección ortogonal de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

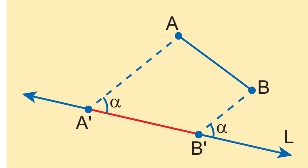
Si $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ($\overline{AC}$ es la hipotenusa)

⇒ ⊿ABC ~ ⊿AHB ~ ⊿BHC; por lo tanto se cumplen los siguientes teoremas:

Atención

También existen otras clases de proyección, y son:

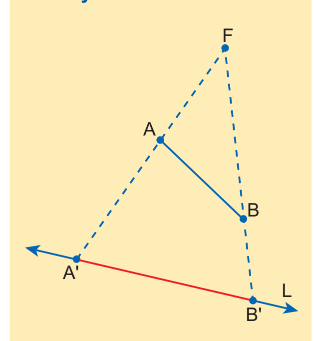
I. Proyección oblicua



Proyectamos $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$ y tenemos:

$\overline{A'B'}$: proyección oblicua de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$, además $\overline{AA'} \,//\, \overline{BB'}$.

II. Proyección cónica



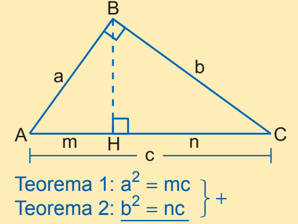
Proyectamos $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$ y tenemos:

$\overline{A'B'}$: proyección cónica de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$, además F se denomina punto focal.



Observación

Teorema de Pitágoras:
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.
Demostración:



Teorema 1: $a^2 = mc$
Teorema 2: $b^2 = nc$ (+)

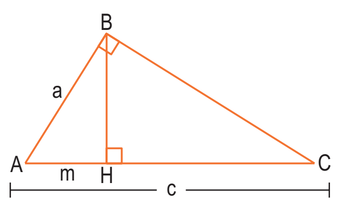
$a^2 + b^2 = \underbrace{(m + n)}_{c}c$

$\Rightarrow$ Se cumple: $a^2 + b^2 = c^2$



Teorema 1

La longitud del cateto menor al cuadrado es igual al producto de la longitud de la hipotenusa y la longitud de la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa.

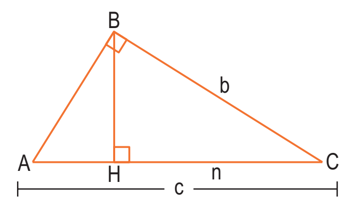


Se cumple: $a^2 = cm$

Donde: $\overline{AH}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

Teorema 2

La longitud del cateto mayor al cuadrado es igual al producto de la longitud de la hipotenusa y la longitud de la proyección del cateto mayor sobre la hipotenusa.

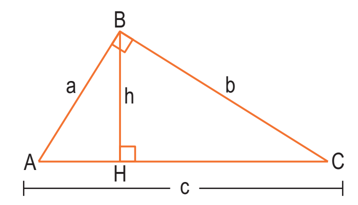


Se cumple: $b^2 = cn$

Donde: $\overline{HC}$ es la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

Teorema 3

El producto de las longitudes de los catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a esta.

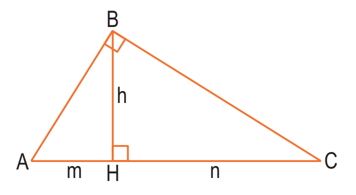


Se cumple: $ab = hc$

Donde: $\overline{BH}$ es la altura relativa a $\overline{AC}$.

Teorema 4

El cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

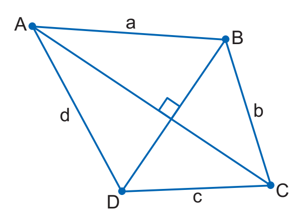


Se cumple: $h^2 = mn$

Donde: $\overline{AH}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$ y $\overline{HC}$ es la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

Nota

Propiedad adicional:
En todo trapezoide cuyas diagonales son perpendiculares.

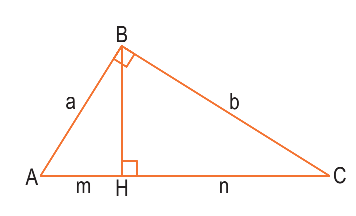


Se cumple: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$



Teorema 5

Los cuadrados de las longitudes de los catetos son proporcionales a las longitudes de sus respectivas proyecciones sobre la hipotenusa.

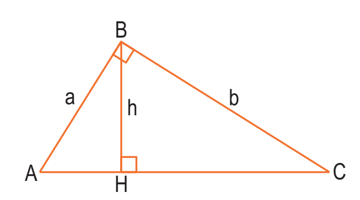


Se cumple: $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{m}{n}$

Donde: $\overline{AH}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$ y $\overline{HC}$ es la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

Teorema 6

El cuadrado de la inversa de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las inversas de las longitudes de los catetos.



Se cumple: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

Donde: $\overline{BH}$ es la altura relativa a $\overline{AC}$.

Ejemplo:
Halla la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 6 cm y 8 cm respectivamente.

Solución:
Del teorema N.° 6, tendríamos:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} \Rightarrow x^2 = \frac{(36)(64)}{100} \Rightarrow x = 4,8 \text{ cm}$$

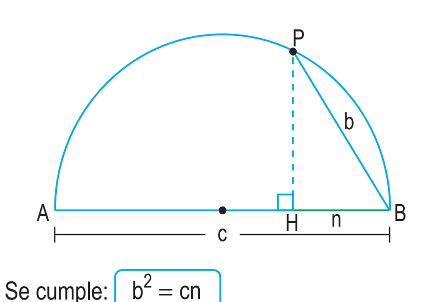


TEOREMA ADICIONALES

Existen, además, varios teoremas que derivan de los antes mencionados y son:

Teorema 1

En una semicircunferencia, el cuadrado de la longitud de una cuerda que parte del extremo del diámetro es igual al producto de las longitudes del diámetro y la proyección de dicha cuerda sobre al diámetro.



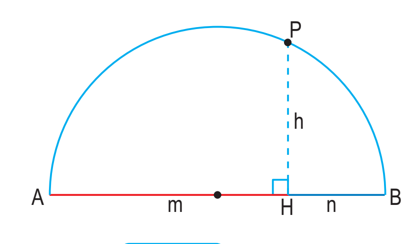
Se cumple: $b^2 = cn$

Donde:

$\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{HB}$ es la proyección de $\overline{PB}$ sobre $\overline{AB}$.

Teorema 2

En una semicircunferencia, el cuadrado de la longitud de la altura trazada desde un punto en ella hacia su diámetro es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados por el pie de la altura en el diámetro.



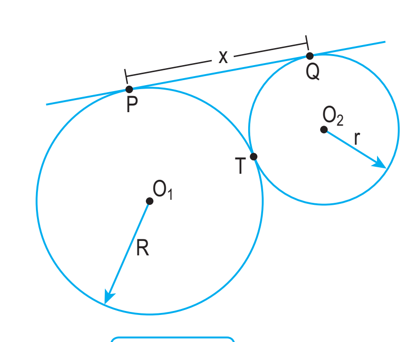
Se cumple: $h^2 = mn$

Donde:

$\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{PH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.

Teorema 3

La longitud del segmento de la tangente común a dos circunferencias tangentes exteriores es igual al doble de la raíz cuadrada del producto de los radios de dichas circunferencias.



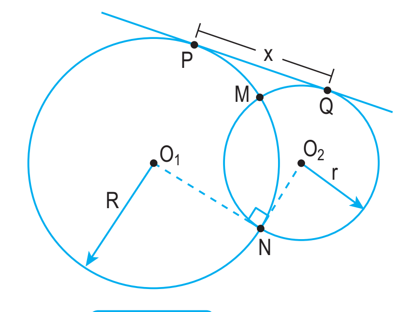
Se cumple: $x = 2\sqrt{Rr}$

Donde:

P; Q y T son puntos de tangencia.

Teorema 4

La longitud del segmento de la tangente común a dos circunferencias ortogonales es igual a la raíz cuadrada del doble del producto de los radios de dichas circunferencias.



Se cumple: $x = \sqrt{2Rr}$

Donde:

P y Q son puntos de tangencia y $m\angle O_1NO_2 = 90°$.

Atención

Relaciones métricas en la circunferencia

I. Teorema de las cuerdas:

Se cumple: $ac = bd$

II. Teorema de la tangente:

Se cumple: $x^2 = ab$

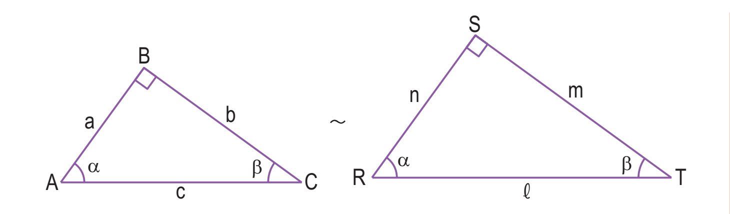
III. Teorema de las secantes:

Se cumple: $ab = mn$



Teorema de Dostor

Dados dos triángulos rectángulos semejantes, el producto de las longitudes de sus hipotenusas es igual a la suma de los productos de las longitudes de sus catetos homólogos.



Se cumple:

$an + bm = c\ell$

Donde: $\triangle ABC \sim \triangle RST$

Ejemplo: Si de un punto parte dos rayos tangente y secante a una circunferencia. Halla la longitud de la cuerda si el segmento tangente mide 6 y el segmento secante mide 9.

Solución: Del teorema de la tangente:

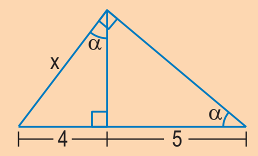
Segmento tangente (T): 6
Segmento secante (S): 9
Cuerda (C): x

$6^2 = 9(9 - x) \Rightarrow x = 5$

Problemas resueltos

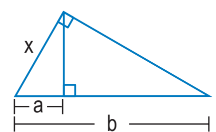


1 Calcula x.



Resolución:

Sabemos: $x^2 = ab$



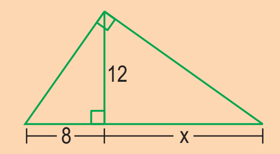
En el problema:

$x^2 = 4\,(4 + 5\,)$

$x^2 = 36$

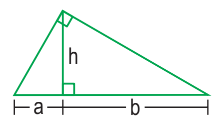
$x = 6$

2 Calcula x.



Resolución:

Sabemos: $h^2 = ab$



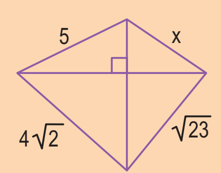
En el gráfico del problema:

$12^2 = 8x$

$144 = 8x$

$x = 18$

3 Calcula x.



Resolución:

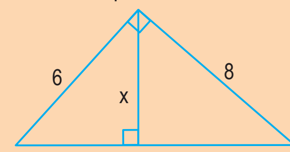
Sabemos:

$x^2 + (4\sqrt{2})^2 = 5^2 + (\sqrt{23})^2 \Rightarrow x^2 + 32 = 25 + 23$

$x^2 = 48 - 32$

$\therefore x = 4$

4 Halla la altura relativa a la hipotenusa.



Resolución:

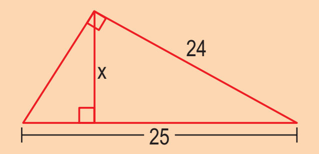
Por la quinta relación:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{8^2 + 6^2}{(8^2)(6^2)}$$

$$x^2 = \frac{(64)(36)}{100}$$

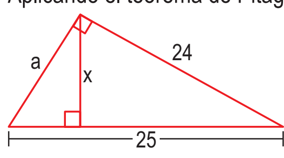
$$x^2 = \frac{576}{25} \Rightarrow x = 4{,}8$$

5 Calcula x.



Resolución:

Del triángulo rectángulo calculamos el valor del cateto que falta. Aplicando el teorema de Pitágoras:



$25^2 = 24^2 + a^2$

$625 = 576 + a^2$

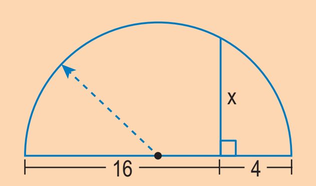
$49 = a^2$

$\Rightarrow a = 7$

Luego:

$a(24) = x(25) \Rightarrow x = 6{,}72$

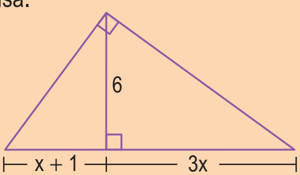
6 Calcula x.



Resolución:

$x^2 = 16(4) \Rightarrow x^2 = 64 \quad \therefore\ x = 8$

7 Halla la hipotenusa.



Resolución:

Por la segunda relación:

$6^2 = (x + 1)(3x)$

$36 = 3x^2 + 3x$

$12 = x^2 + x$

$0 = x^2 + x - 12$

x 4

x – 3

$0 = (x + 4)(x - 3)$

Para:

$x > 0 \Rightarrow x = 3$

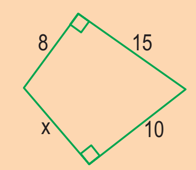
Por lo tanto, la hipotenusa es:

$(x + 1) + (3x) = 4x + 1$

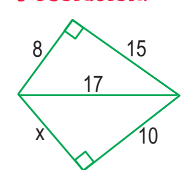
$= 4(3) + 1$

$= 13$

8 Halla x.



Resolución:



Por el teorema de Pitágoras:

$x = \sqrt{17^2 - 10^2}$

$x = 3\sqrt{21}$

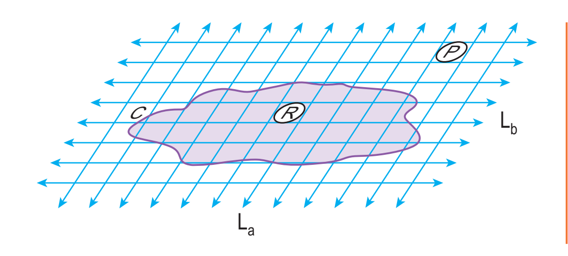




ÁREA DE UNA SUPERFICIE PLANA

SUPERFICIE PLANA Y REGIÓN PLANA

Una superficie plana es aquel conjunto cuyos elementos son rectas dispuestas a lo largo y ancho de un espacio bidimensional. Luego, una región plana vendría a ser una superficie plana limitada por una línea cerrada.

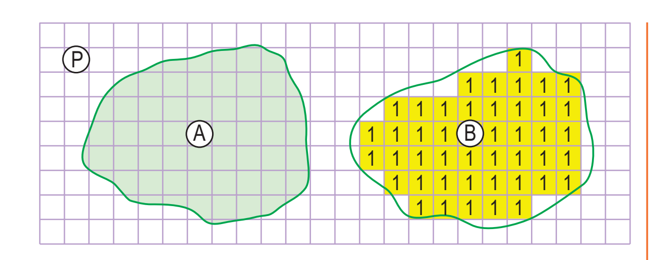


Notación:

P: superficie plana compuesta por rectas longitudinales ($\overleftrightarrow{L_a}$) y transversales ($\overleftrightarrow{L_b}$).
R: región plana perteneciente a la superficie P.
C: línea cerrada, límite de R.

Área de una región plana

El área de una región plana es la medida de la extensión de superficie la cual está limitada por una línea cerrada o contorno. Además, esta medida se expresa en unidades cuadradas (cm^2; m^2; $inch^2$; etc.)



Las regiones A y B pertenecen a la superficie plana P.

I. El área de la región A es todo lo que está de color verde.
II. El área de la región B está representada aproximadamente por 45 cuadrados de color amarillo, por lo tanto su área aproximada será: 45 unidades cuadradas.

Recuerda

El área de una región plana es igual a la suma de las áreas de todas sus regiones parciales:

A_1, A_2, A_3

$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

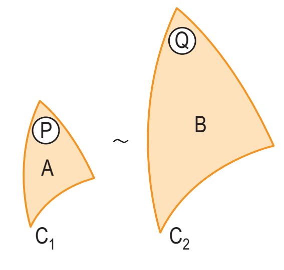


COMPARACIÓN DE REGIONES PLANAS

Dos regiones planas, pueden relacionarse de la siguiente manera:

I. Regiones semejantes

Son aquellas regiones cuyos contornos o líneas cerradas que los delimitan tienen la misma forma aunque diferente tamaño y por lo tanto tienen áreas diferentes.

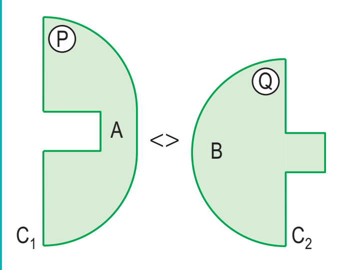


Se dice que las regiones P y Q son semejantes si:

$C_1 \sim C_2$ y $A \neq B$

II. Regiones equivalentes

Son aquellas regiones cuyos contornos tienen formas distintas; sin embargo ambas encierran o contienen una misma extensión de superficie o área.

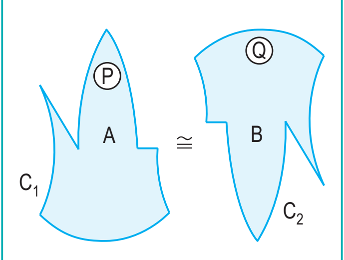


Se dice que las regiones P y Q son equivalentes si:

si $A = B$ y $C_1 \neq C_2$

III. Regiones congruentes

Son aquellas regiones cuyos contornos tienen la misma forma; esto determina que ambas regiones contengan superficies con la misma extensión o área.



Se dice que las regiones P y Q son congruentes si:

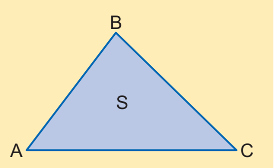
$C_1 \cong C_2$ y $A = B$

ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

Una región es triangular cuando su contorno lo conforma un triángulo. Además, conociendo las dimensiones de dicho contorno podemos calcular el área de la región triangular en unidades cuadradas. En general, el área de una región triangular es igual al semiproducto de la longitud de uno de sus lados y la longitud de la altura relativa a dicho lado. Esta fórmula varía en función a la naturaleza del triángulo:

Atención

Notación del área de una región triangular:

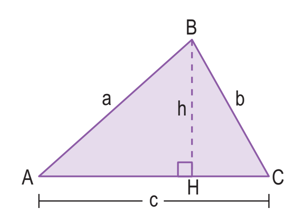


Notación: $A_{\triangle ABC} = S$

Se lee: área de la región triangular ABC.



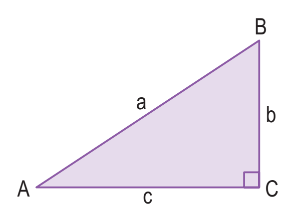
I. Área de un triángulo acutángulo



$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(AC)(BH)$

$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ch$

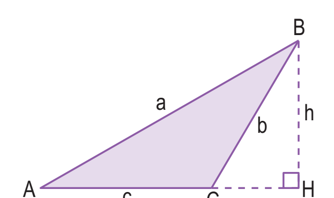
II. Área de un triángulo rectángulo



$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(AC)(BC)$

$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}cb$

III. Área de un triángulo obtusángulo

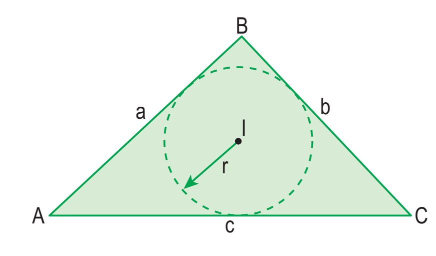


$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(AC)(BH)$

$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ch$

Formulas alternativas para calcular el área de un triángulo

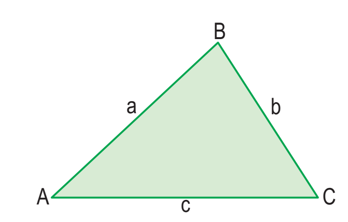
I. **Fórmula del inradio**
El área de una región triangular es igual al producto de su semiperímetro con el inradio de dicha región triangular.



Si $P = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$\Rightarrow$ $A_{\triangle ABC} = pr$

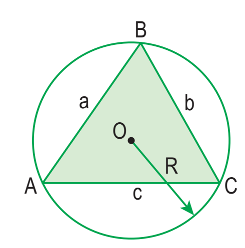
II. **Fórmula de Herón**
El área de un triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto de su semiperímetro con la diferencia del semiperímetro y cada de sus lados.



Si $P = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$\Rightarrow$ $A_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

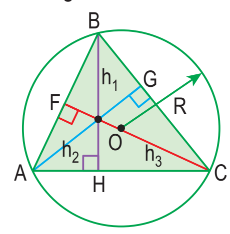
III. **Fórmula del circunradio (a)**
El área de una región triangular es igual al producto de las longitudes de los tres lados divididos entre cuatro veces la longitud de su circunradio.



Si R es el circunradio del triángulo ABC.

$\Rightarrow$ $A_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$

IV. **Fórmula del circunradio (b)**
El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del semiproducto del circunradio con las longitudes de las alturas relativas a cada lado de dicha región.



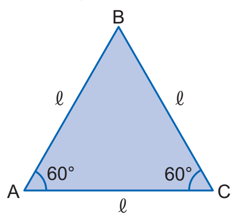
Si R es el circunradio del triángulo ABC.

$\Rightarrow$ $A_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{R}{2}(h_1h_2h_3)}$

Nota

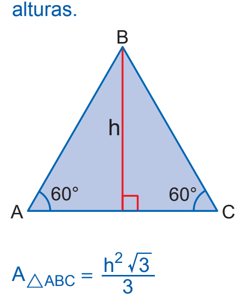
Área de una región triangular equilátera:

- En función de la longitud de cualquiera de sus lados.



$A_{\triangle ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

- En función de la longitud de cualquiera de sus alturas.



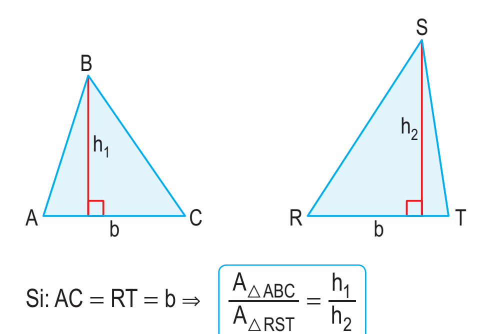
$A_{\triangle ABC} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$



RELACIONES ENTRE ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

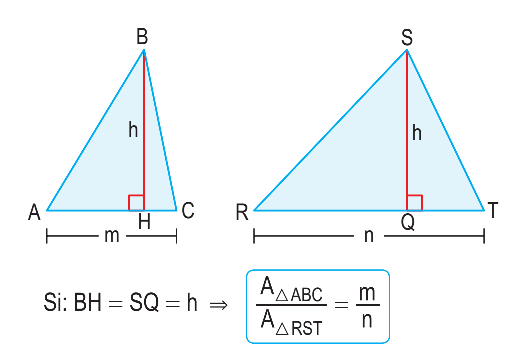
Cuando comparamos las áreas de dos regiones triangulares mediante un cociente nos damos cuenta de que las áreas de ambas regiones son proporcionales a los elementos de dichas regiones.

a) Si dos regiones triangulares poseen uno de sus lados de igual longitud; sus áreas serán proporcionales a las longitudes de las alturas relativas a dichos lados.



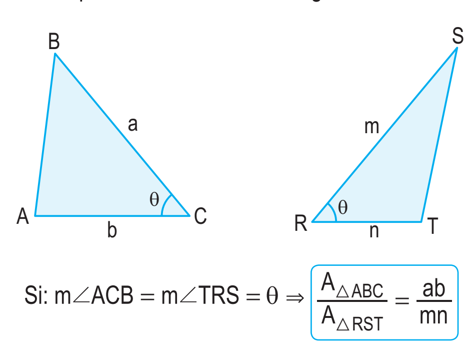
Si: $AC = RT = b \Rightarrow \boxed{\dfrac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle RST}} = \dfrac{h_1}{h_2}}$

b) Si dos regiones triangulares tienen una de sus alturas de igual longitud; sus áreas serán proporcionales a las longitudes de los lados a las cuales son relativas a dichas alturas.



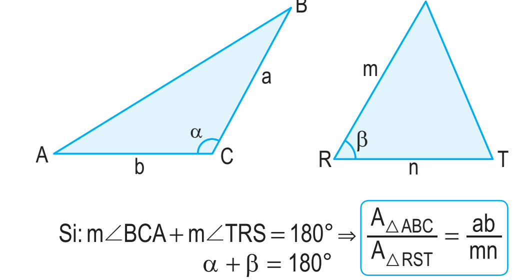
Si: $BH = SQ = h \Rightarrow \boxed{\dfrac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle RST}} = \dfrac{m}{n}}$

c) Si dos regiones triangulares poseen uno de sus ángulos de igual medida, sus áreas son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan dichos ángulos.



Si: $m\angle ACB = m\angle TRS = \theta \Rightarrow \boxed{\dfrac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle RST}} = \dfrac{ab}{mn}}$

d) Si dos regiones triangulares poseen, cada uno, un ángulo que es suplementario con el otro; entonces sus áreas son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan dichos ángulos.

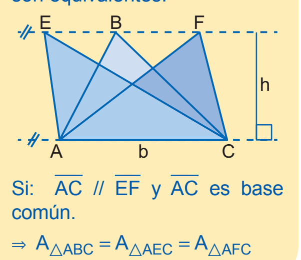


Si: $m\angle BCA + m\angle TRS = 180° \Rightarrow \boxed{\dfrac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle RST}} = \dfrac{ab}{mn}}$

$\alpha + \beta = 180°$

Observación

Si dos o más regiones triangulares comparten la misma base y las longitudes de sus alturas son iguales, entonces son equivalentes.



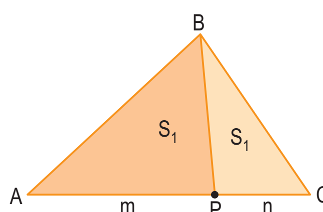
Si: $\overline{AC}$ // $\overline{EF}$ y $\overline{AC}$ es base común.

$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = A_{\triangle AEC} = A_{\triangle AFC}$

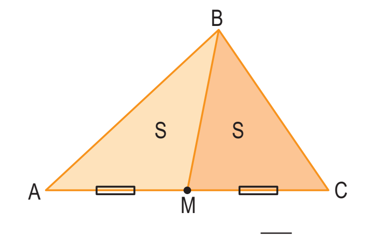


Propiedades adicionales

I. Si en un triángulo cualquiera trazamos una ceviana interior, esta determinará dos regiones triangulares proporcionales a las longitudes de los segmentos que dicha ceviana origina.

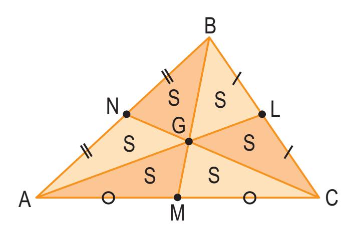


$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{m}{n}$; donde $\overline{BP}$ es ceviana.

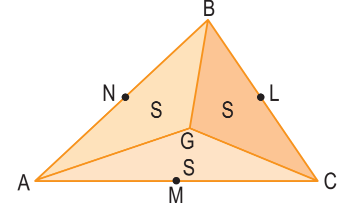


$S = A_{\triangle ABM} = A_{\triangle MBC}$, donde $\overline{BM}$ es mediana

II. Si en un triángulo cualquiera trazamos las tres medianas, entonces se determinarán seis regiones triangulares las cuales tienen la misma área, pues son equivalentes.

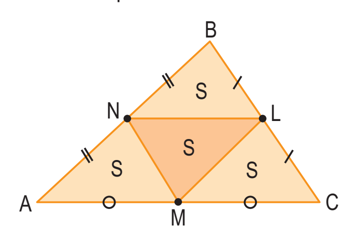


$S = A_{\triangle ANG} = A_{\triangle BGN} = A_{\triangle BGC} = A_{\triangle CGL}$
$= A_{\triangle CGM} = A_{\triangle AGM}$

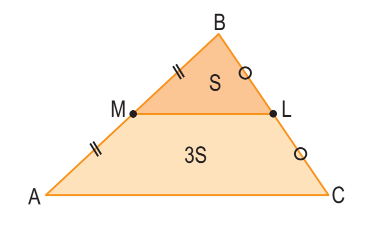


$S = A_{\triangle ABG} = A_{\triangle BGC} = A_{\triangle AGC}$; (G es baricentro)

III. Si en un triángulo cualquiera trazamos las tres bases medias relativas a cada lado se determinan cuatro regiones triangulares las cuales son equivalentes



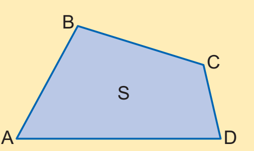
$S = A_{\triangle ANM} = A_{\triangle NBL} = A_{\triangle MLC} = A_{\triangle NLM}$



$S = A_{\square AMLC} = 3(A_{\triangle MBL})$

Atención

Notación del área de una región cuadrangular:

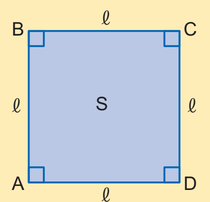


Notación:
$A_{\square ABCD} = S$
Se lee: área de la región cuadrangular ABCD.



Recuerda

Área de un cuadrado:

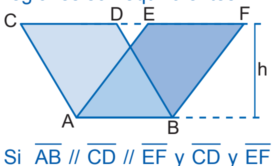


$A_{\square ABCD} = \ell^2 = S$
El área de un cuadrado es la medida de superficie básica dada su simplicidad visual y matemática.



Nota

Si dos o más regiones limitadas por paralelogramos tienen una misma base y los lados opuestos a dicha base son colineales, entonces dichas regiones son equivalentes.

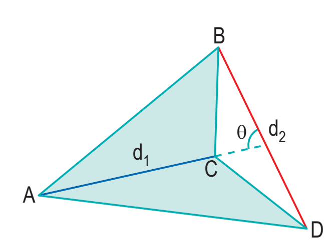


Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son colineales.
$\Rightarrow A_{\square ACDB} = A_{\square AEFB}$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

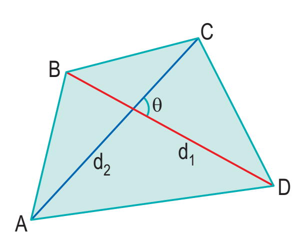
Una región es cuadrangular cuando su contorno lo conforma un cuadrilátero concavo o convexo y su área, en términos generales, es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales por el seno de la medida del menor ángulo determinado por dichos diagonales.

I. Área de un cuadrilátero cóncavo



Si $d_1 = AC$ y $d_2 = BD \Rightarrow A_{\square ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen}\theta$

II. Área de un cuadrilátero convexo

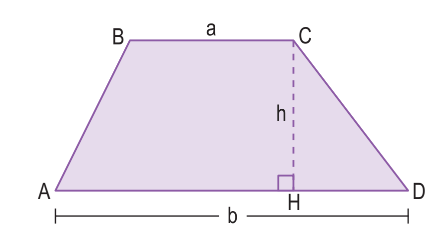


Si $d_1 = BD$ y $d_2 = AC \Rightarrow A_{\square ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen}\theta$

Áreas de regiones cuadrangulares específicas

I. **Área de un trapecio**

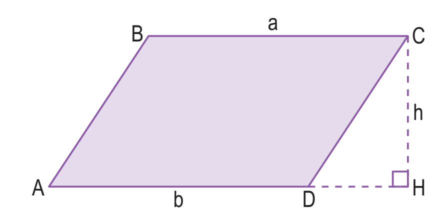
Es igual al producto de la semisuma de las longitudes de sus bases por la longitud de su altura o distancia entre sus bases.



Si ABCD es un trapecio y $\overline{CH}$ su altura.
$\Rightarrow A_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(a + b)h$

II. **Área de un paralelogramo**

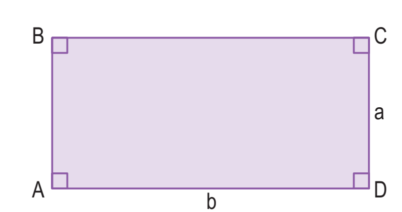
Es igual al producto de longitud de uno de sus lados (base) por la longitud de la distancia hacia el otro lado paralelo al primero (altura).



Si ABCD es un paralelogramo y $\overline{CH}$ su altura.
$\Rightarrow A_{\square ABCD} = bh$

III. **Área de un rectángulo**

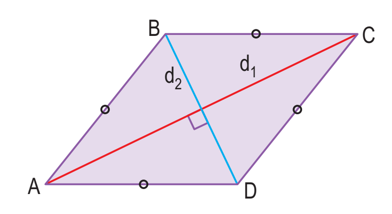
Es igual al producto de las longitudes de sus lados no congruentes.



En el rectángulo ABCD se cumple:
$A_{\square ABCD} = ab$

IV. **Área de un rombo**

Es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales.



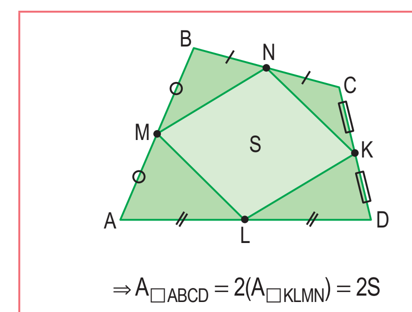
En el rombo ABCD se cumple:
$A_{\diamond ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Relaciones entre áreas de regiones cuadrangulares

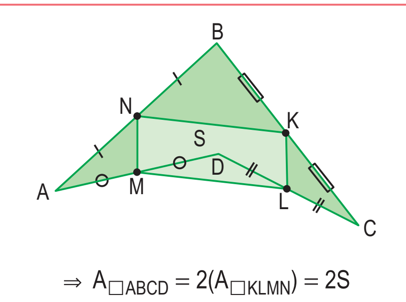
Cuando en una región cuadrangular cóncava o convexa se trazan segmentos que determinan otras regiones cuadrangulares dentro o fuera de la primera, entonces se sabe que estas regiones se encuentran relacionadas de las siguientes maneras:



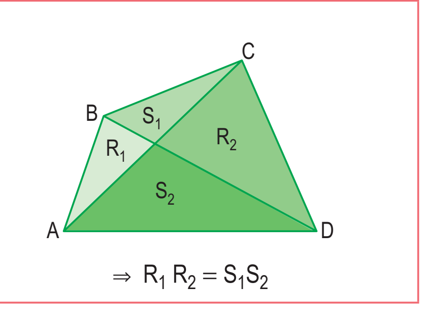
a. Relaciones de áreas en regiones cuadrangulares



$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 2(A_{\square KLMN}) = 2S$

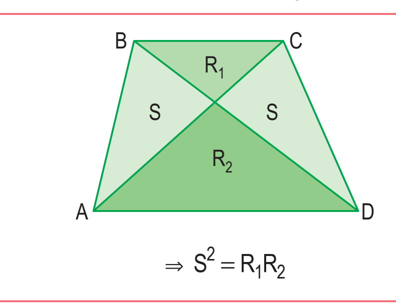


$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 2(A_{\square KLMN}) = 2S$

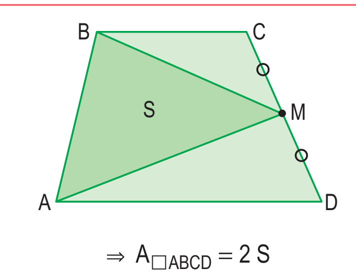


$\Rightarrow R_1 R_2 = S_1 S_2$

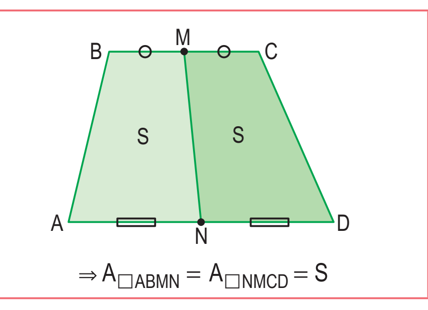
b. Relaciones de áreas de trapecios



$\Rightarrow S^2 = R_1R_2$

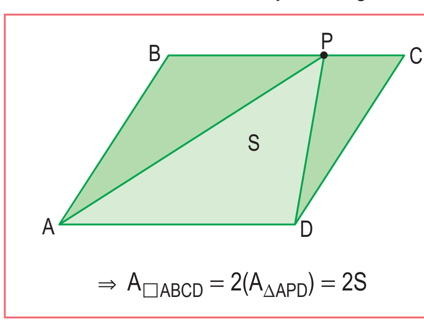


$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 2\,S$

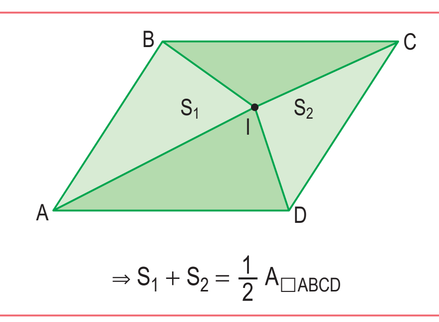


$\Rightarrow A_{\square ABMN} = A_{\square NMCD} = S$

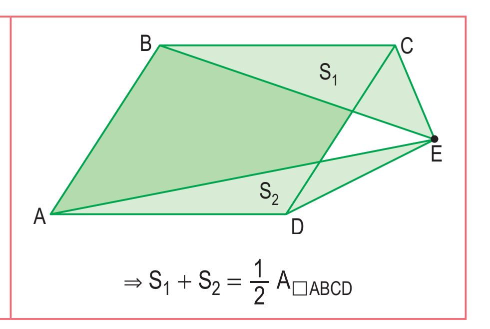
c. Relaciones de áreas de paralelogramos



$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 2(A_{\triangle APD}) = 2S$



$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{1}{2} A_{\square ABCD}$

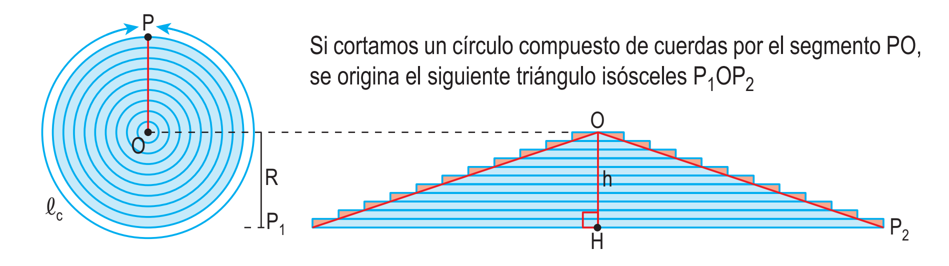


$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{1}{2} A_{\square ABCD}$

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

Una región es circular cuando su contorno lo conforma una circunferencia y su área es igual al cuadrado de la longitud de su radio multiplicado por el número irracional pi (π); que aproximadamente es igual a 3,141592654...

Si cortamos un círculo compuesto de cuerdas por el segmento PO, se origina el siguiente triángulo isósceles P_1OP_2





$\therefore$ Sabemos que las regiones del círculo y el triángulo son equivalentes, por lo tanto sus áreas son iguales, entonces: $A_{\bigcirc} = A_{\triangle}$, pero $A_{\triangle} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$ ... (I)

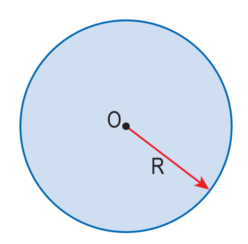
Sabemos que la longitud de la circunferencia es igual a la longitud de la base de triángulo, así también la longitud del radio es igual a la longitud de la altura triángulo, entonces $\ell_c = 2\pi R = P_1P_2$ y $h = R = OH$; reemplazando en (I):

$A_{\triangle} = \frac{1}{2}\ell_c h \Rightarrow A_{\triangle} = \frac{1}{2}(2\pi R)(R) \Rightarrow A_{\triangle} = \pi R^2$; pero área del círculo < > área del triángulo $\Rightarrow A_{\bigcirc} = \pi R^2$

Tipos de regiones circulares

A) Círculo

Una región circular o círculo es aquella región plana cuyo contorno es una circunferencia.

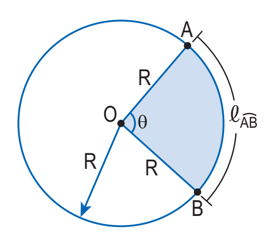


$\Rightarrow$ $A_{\bigcirc} = \pi R^2$

donde R es radio y O es centro.

B) Sector circular

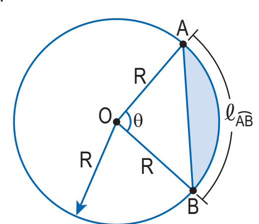
Es aquella región plana comprendida entre dos radios distintos y el arco que estar determinar.



$A_{\triangleleft AOB} = \frac{1}{2}\ell_{\widehat{AB}}R \Rightarrow A_{\triangleleft AOB} = \pi R^2\left(\frac{\theta}{360°}\right)$

C) Segmento circular

Es aquella región plana limitada por un arco y la cuerda que une los extremos de dicho arco.

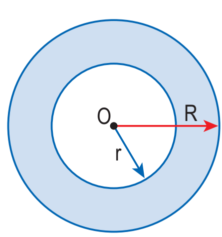


$A_{\mathcal{D}} = A_{\triangleleft} - A_{\triangle AOB} \Rightarrow A_{\mathcal{D}} = \frac{\ell_{\widehat{AB}}R}{2} - \frac{R^2 \operatorname{sen}\theta}{2}$

$\Rightarrow$ $A_{\mathcal{D}AB} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\theta}{180°} - \operatorname{sen}\theta\right)$

D) Corona circular

Es aquella región plana contenida entre dos circunferencias concéntricas.

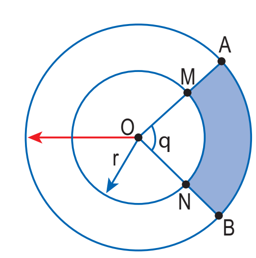


$A_{\circledcirc} = A_{\circledR} - A_{\textcircled{r}} \Rightarrow A_{\circledcirc} = \pi R^2 - \pi r^2$

$\Rightarrow$ $A_{\circledcirc} = (R^2 - r^2)\pi$

E) Trapecio circular

Es aquella porción de corona circular limitada entre dos radios distintos.



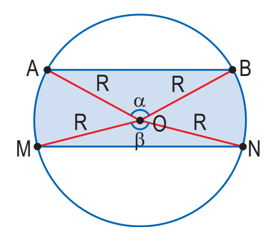
$A_{\mathcal{D}\mathcal{D}} = A_{\triangleleft AOB} - A_{\triangleleft MON}$

$A_{\mathcal{D}\mathcal{D}} = \pi R^2\left(\frac{\theta}{360°}\right) - \pi r^2\left(\frac{\theta}{360°}\right)$

$\Rightarrow$ $A_{\mathcal{D}\mathcal{D}MNAB} = \frac{\theta\pi}{360°}(R^2 - r^2)$

F) Faja circular

Es aquella porción de círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas.



$A_{\sqsubset\!\sqsupset} = A_{\bigcirc} - (A_{\mathcal{D}\widehat{AB}} + A_{\mathcal{D}\widehat{MN}})$;

$A_{\sqsubset\!\sqsupset} = \pi R^2 - \left(\frac{\alpha\pi R^2}{360°} - \frac{R^2 \operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{\beta\pi R^2}{360°} - \frac{R^2 \operatorname{sen}\beta}{2}\right)$

Entonces:

$A_{\sqsubset\!\sqsupset ABMN} = \pi R^2\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{360°}\right) + \frac{R^2}{2}(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)$

Atención

Notación de las áreas de regiones circulares:

a) Notación del área de un círculo:
$A_{\bigcirc} = S$;
Se lee: área de la región circular.

b) Notación del área de un sector circular:
$A_{\triangleleft MON} = S$
Se lee: área del sector circular con centro en O y arco MN.

c) Notación del área de un segmento circular:
$A_{\mathcal{D}MN} = S$
Se lee: área del segmento circular comprendido en el arco MN.

d) Notación del área de una corona circular:
$A_{\circledcirc} = S$
Se lee: área de la corona circular.

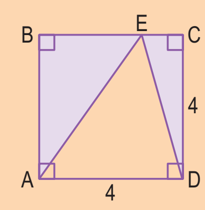
e) Notación del área de un trapecio circular:
$A_{\mathcal{D}\mathcal{D}MNPQ} = S$
Se lee: área del trapecio circular comprendido entre los arcos MN y PQ.

f) Notación del área de una faja circular:
$A_{\sqsubset\!\sqsupset PQMN} = S$
Se lee: área de la faja circular comprendida entre las cuerdas PQ y MN.





1 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:

Sea S el área de la región sombreada, entonces:

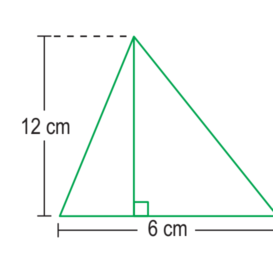
$S = S_{\square ABCD} - S_{\triangle AED}$

$S = 4^2 - \dfrac{(4)(4)}{2}$

$\therefore\ S = 16 - 8 = 8$

2 La altura de un triángulo mide 12 cm y su base mide la mitad de la altura. Determina su área.

Resolución:



Si h = 12 cm

$\Rightarrow b = \dfrac{12}{2}$ cm

b = 6 cm

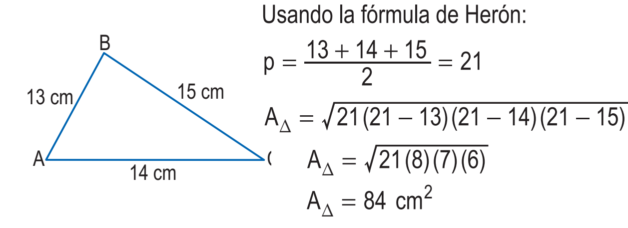
Luego: $A_{\triangle} = \dfrac{bh}{2}$

$A_{\triangle} = \dfrac{6(12)}{2}$

$\Rightarrow A_{\triangle} = 36\ cm^2$

3 Los lados de un triángulo miden 13 cm, 14 cm y 15 cm. Halla el área de la región triangular.

Resolución:



Usando la fórmula de Herón:

$p = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$

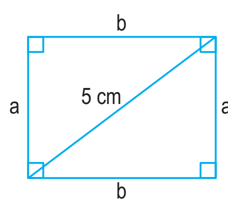
$A_{\triangle} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$A_{\triangle} = \sqrt{21(8)(7)(6)}$

$A_{\triangle} = 84\ cm^2$

4 El perímetro de un rectángulo mide 14 cm. Si su diagonal mide 5 cm, calcula el área del rectángulo.

Resolución:



Perímetro:

$14 = 2a + 2b$

$7 = a + b$ ...(I)

Por el teorema de Pitágoras:

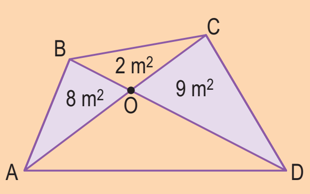
$a^2 + b^2 = 5^2$ ...(II)

Resolviendo (I) y (II): $a = 3 \wedge b = 4$

Por lo tanto, el área:

$A = (3)(4) = 12\ cm^2$

5 En la figura halla el área del cuadrilátero ABCD.



Resolución:

Por relación de áreas:

$(A_{\triangle ABO})(A_{\triangle COD}) = (A_{\triangle BOC})(A_{\triangle AOD})$; reemplazando:

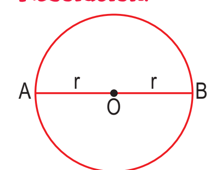
$(8)(9) = (2)(A_{\triangle AOD})$

$36 = A_{\triangle AOD}$

Por lo tanto : $A_{ABCD} = 8 + 2 + 9 + 36 = 55\ m^2$

6 Calcula el área de un círculo si su diámetro es igual al lado de un cuadrado de área igual a 36 m².

Resolución:



$A_{\square} = 36\ m^2$

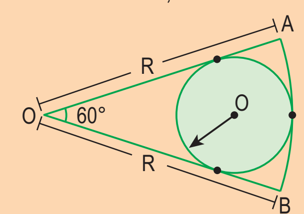
$L^2 = 36\ m^2$

$L = 6$ m

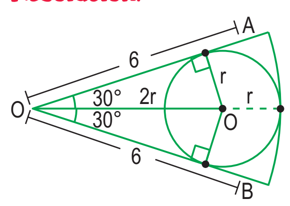
Dato: $2r = L \Rightarrow r = 3$ m

$A_{\bigcirc} = \pi(3\ m)^2 \Rightarrow A_{\bigcirc} = 9\pi\ m^2$

7 Halla el área del círculo mostrado, si: R = 6 m.



Resolución:



Del gráfico:

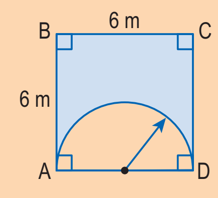
$3r = 6$

$r = 2$

$A_{\bigcirc} = \pi r^2 = \pi(2)^2$

$A_{\bigcirc} = 4\pi\ m^2$

8 Halla el área de la región sombreada:



Resolución:

Por diferencia de áreas:

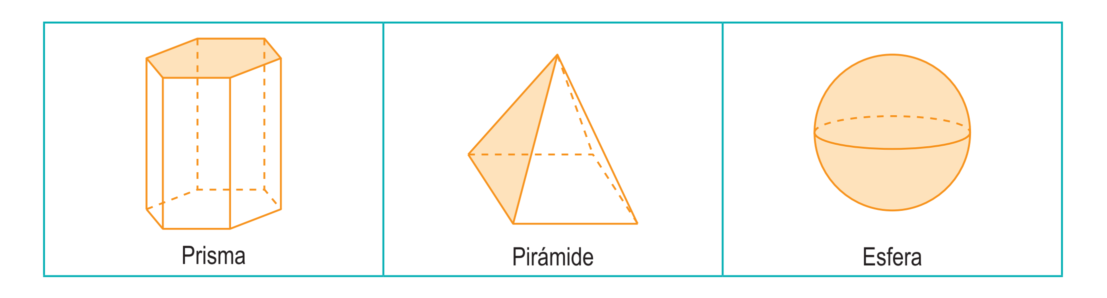
A = [cuadrado] − [semicírculo]

$A = 6^2 - \dfrac{\pi(3)^2}{2} = 36 - \dfrac{9\pi}{2} = \dfrac{9}{2}(8 - \pi)\ m^2$

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

DEFINICIÓN

Como sabemos, la geometría plana estudia las figuras planas, las cuales son aquellas que tienen todos sus puntos en un mismo plano. Ahora bien, la geometría espacial tiene por objeto el estudio de las figuras sólidas o del espacio, es decir, de las figuras cuyos puntos no pertenecen todas a un mismo plano, sino al espacio tridimensional. Por ejemplo:



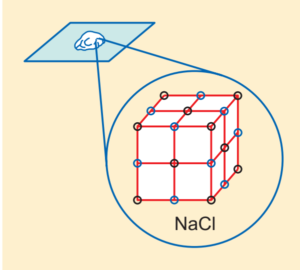
Prisma | Pirámide | Esfera

Atención

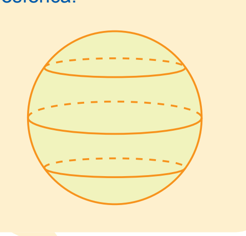
La geometría del espacio siempre nos rodea desde lo más pequeño (las moléculas), hasta lo más grande (las estrellas)

Ejemplos:

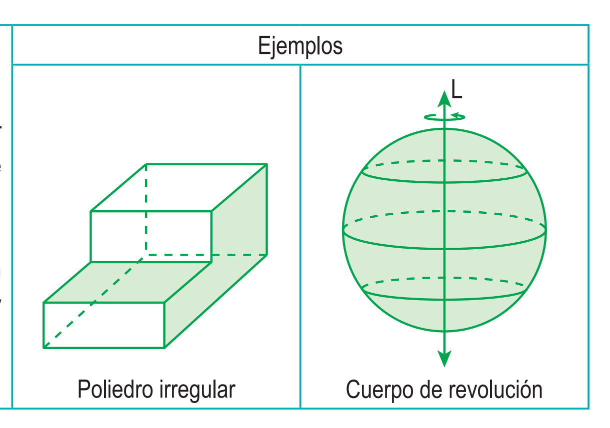
- El cristal iónico NaCl (sal común) tiene forma cúbica.



- El Sol tiene una forma esférica.



SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

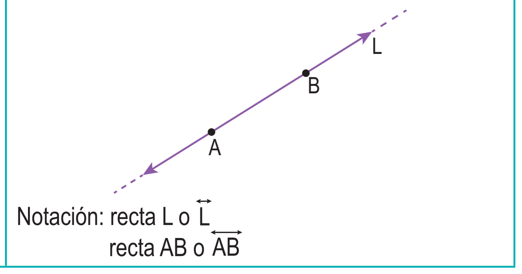
	Ejemplos
Un sólido geométrico es aquella porción del espacio separada del espacio inmediato, por un conjunto de puntos que forman la superficie del sólido. Los sólidos de acuerdo a su superficie pueden ser: poliedros, cuerpos de revolución y cuerpos irregulares.	 Poliedro irregular · Cuerpo de revolución



RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

La recta

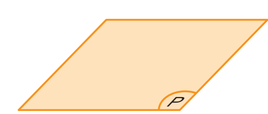
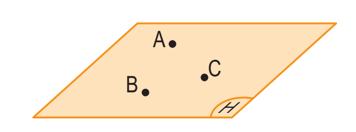
Es un ente geométrico definido, sobre las cuales se apoyan las definiciones de otras representaciones geométricas.

Axioma de la recta La recta es la unión de infinitos puntos colineales, sin un punto de origen. El segmento que une dos puntos en el espacio es parte de una recta.	 Notación: recta L o $\overleftrightarrow{L}$ recta AB o $\overleftrightarrow{AB}$

El plano

Si se piensa en una superficie llana, perfectamente lisa y sin espesor, que se extiende indefinidamente en todas las direcciones, se tendrá una buena idea de lo que se supone es una superficie plana o simplemente un plano.

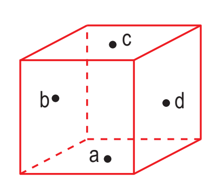
Por ejemplo: la superficie del tablero de una mesa perfectamente lisa nos da una idea aproximada de una parte de la superficie plana y si la imaginamos de extensión ilimitada, tendremos la idea de un plano.

Un plano en el espacio se representa por medio de un paralelogramo.  Notación: plano P o ▱ P	**Axioma del plano** Tres puntos no colineales determinan un plano al cual pertenecen.  {A; B; C} ∈ ▱ H

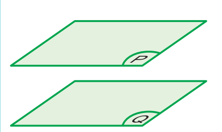
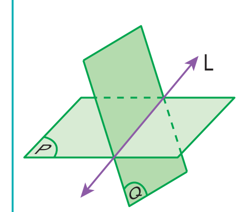
Un plano, se determina mediante los siguientes teoremas:

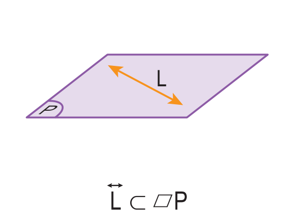
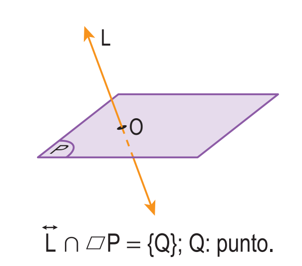
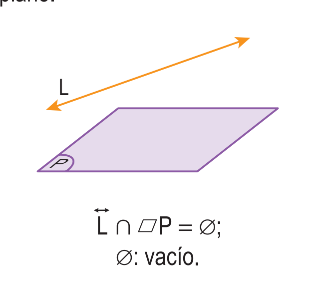
1.er teorema: una recta y un punto exterior a ella determinan un plano. A ∈ ▱P ∧ $\overleftrightarrow{L}$ ⊂ ▱P	2.do teorema: dos rectas que se intersecan (secantes) determinan un plano. $\overleftrightarrow{L}$ ⊂ ▱Q ∧ $\overleftrightarrow{\beta}$ ⊂ ▱Q	3.er teorema: dos rectas paralelas determinan un plano. $\overleftrightarrow{L}$ ⊂ ▱R ∧ $\overleftrightarrow{\beta}$ ⊂ ▱R

El espacio

Axioma del espacio El espacio contiene al menos cuatro puntos no coplanarios ni colineales. Esto nos indica que el espacio no es llano.		a; b; c; d están en diferentes caras del cubo.

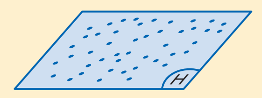
Posiciones relativas en el espacio

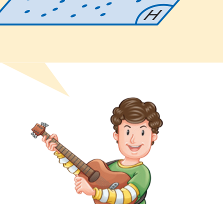
A) Posiciones relativas entre dos planos:	
Planos paralelos: dos planos son paralelos entre sí cuando no tienen un punto en común, es decir, no se intersecan.  Si: ▱P ∩ ▱Q = ∅ ⇒ ▱P // ▱Q ∅: vacío o nulo.	**Planos secantes:** son dos planos que tienen una recta en común denominada arista o traza de un plano sobre otro.  Si: ▱P ∩ ▱Q = $\overleftrightarrow{L}$ ⇒ ▱P ∧ ▱Q son secantes.

B) Posiciones de una recta y un plano en el espacio:		
Una recta puede estar contenida en un plano.  $\overleftrightarrow{L}$ ⊂ ▱P	Una recta puede ser secante a un plano.  $\overleftrightarrow{L}$ ∩ ▱P = {Q}; Q: punto.	Una recta puede ser paralela a un plano.  $\overleftrightarrow{L}$ ∩ ▱P = ∅; ∅: vacío.

Atención

Los puntos que pertenecen a un mismo plano se llaman puntos coplanarios.



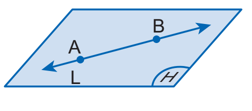






Nota

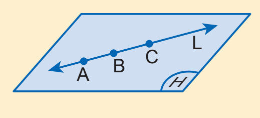
Dos puntos cualesquiera de un plano determinan una recta contenida en el plano.



{A; B} ∈ ▱H ∧ $\overleftrightarrow{L}$ ⊂ ▱H

Observación

Tres puntos no siempre forman un plano (puntos colineales).

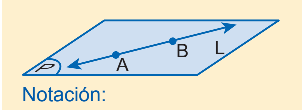


{A; B; C} ∈ ▱H ∧ $\overleftrightarrow{L}$ ⊂ ▱H



Recuerda

Una recta pertenece a un plano o está contenida en él, si tienen al menos dos puntos comunes.



Notación:

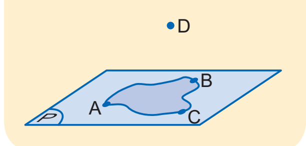
$\{A; B\} \in \square P$

$\{A; B\} \in \overleftrightarrow{L}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \subset \square P$

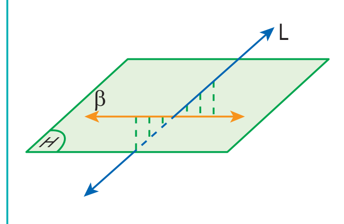
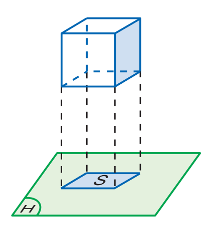
El espacio contiene al menos cuatro puntos no coplanares, esto nos indica que el espacio no es llano.

•D



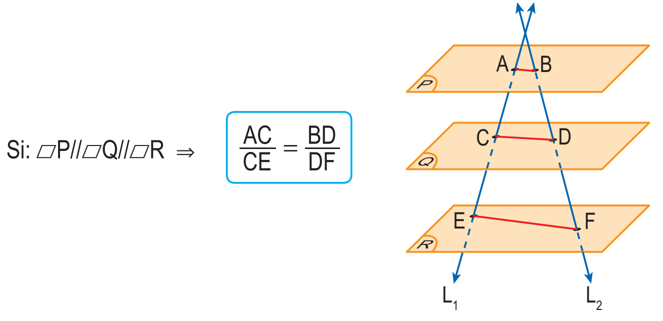


Proyecciones en el espacio

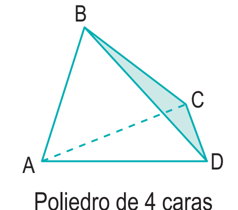
a) Proyección de un punto sobre un plano.	b) Proyección de una recta sobre un plano.	c) Proyección de una figura cualquiera sobre un plano.
•A •A' H		
$A \notin H$ $A' \in H$	$\overleftrightarrow{B}$ es proyección de $\overleftrightarrow{L}$ sobre el plano H.	S es el área proyectada del cubo sobre el plano H.

Teorema de Thales

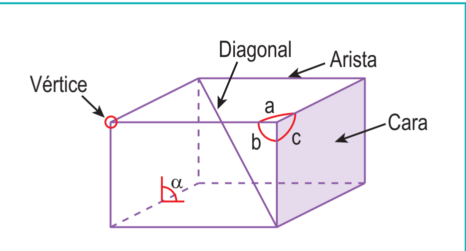
Si tres o más planos paralelos son intersecados por dos rectas, los segmentos entre los planos tienen longitudes proporcionales.



POLIEDROS

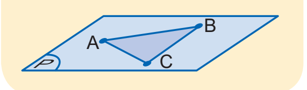
Un poliedro es un sólido geométrico formado por regiones poligonales contiguas, situadas en distintos planos que constituyen las caras. Para ser un poliedro debe tener un mínimo de 4 caras.	 B C A D Poliedro de 4 caras	G F C B H E A D Poliedro de 6 caras

Elementos

Cara: cada una de las regiones poligonales que las limitan. **Arista:** cada una de las intersecciones de sus caras. **Vértice:** cada uno de los puntos en que concurren sus aristas. **Ángulo diedro:** ángulo formado por dos caras consecutivas. **Ángulo poliedro:** los anguloides de cada vértice. **Diagonal:** el segmento de recta que une dos vértices no situados en una misma cara.	 Diagonal, Arista, Vértice, a, b, c, Cara, α α: ángulo diedro. a; b y c: ángulos del poliedro.

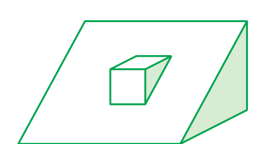
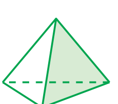
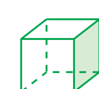
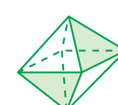
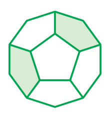
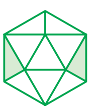
Atención

La condición necesaria y suficiente para que dos planos coincidan es que tengan tres puntos comunes no colineales.

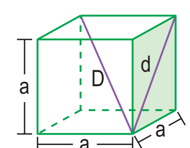




Clasificación

Poliedros irregulares: sus caras son regiones poligonales irregulares, desiguales y cuyos anguloides no son congruentes del todo. 	**Poliedros regulares:** sus caras son regiones poligonales regulares congruentes y todos sus diedros y anguloides también son congruentes.  Tetraedro  Cubo  Octaedro  Dodecaedro  Icosaedro

Hexaedro regular o cubo: limitados por 6 regiones cuadradas.

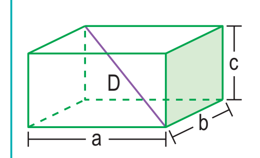


$A_T = 6a^2$ $V = a^3$

$D = a\sqrt{3}$ $d = a\sqrt{2}$

d: diagonal de una de las caras del cubo.
A_T: área total de la superficie del cubo.
V: volumen del cubo.
D: diagonal del cubo.

Paralelepípedo rectangular o rectoedro: es aquel poliedro cuyas caras son rectángulos.



$A_T = 2(ab + bc + ac)$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$V = abc$

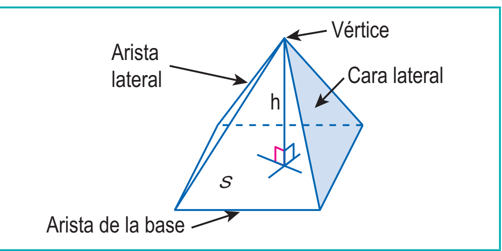
A_T: área total del paralelepípedo.
D: diagonal del paralelepípedo.
V: volumen total del paralelepípedo

PIRÁMIDE

Sólido (poliedro), cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales son triángulos que tienen un vértice en común.

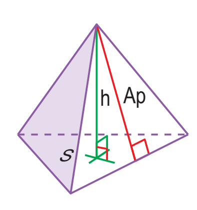
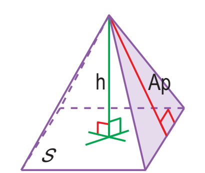
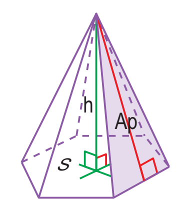
Elementos

Vértice: es el vértice común de las caras triangulares.
Caras laterales: son las caras triangulares.
Base (S): es la cara no lateral que tiene la forma de un polígono.
Altura (h): es la perpendicular trazada del vértice a la base.



Pirámide regular

Una pirámide es regular si la base es una región poligonal regular y sus aristas laterales son congruentes.

Pirámide triangular	Pirámide cuadrangular	Pirámide hexagonal
		
Base: triángulo equilátero.	Base: cuadrado.	Base: hexágono regular.

A_L = (semiperímetro de la base)Ap

$A_T = A_L + S$

$V = \frac{1}{3}Sh$

Donde:

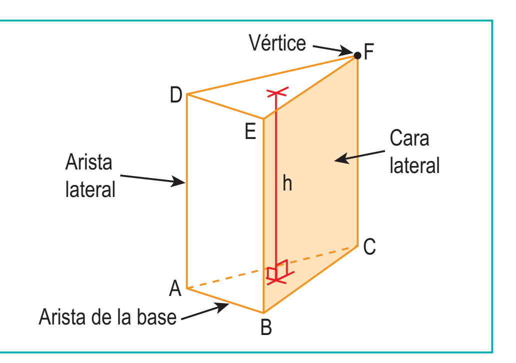
A_L: área lateral.
A_T: área total.
h: altura de la pirámide.
Ap: apotema de la pirámide.
V: volumen.
S: área de la base.

PRISMA

Se llama prisma a aquel poliedro limitado lateralmente por varias regiones paralelográmicas y dos regiones poligonales congruentes cuyos planos que las contienen son paralelos.

Elementos

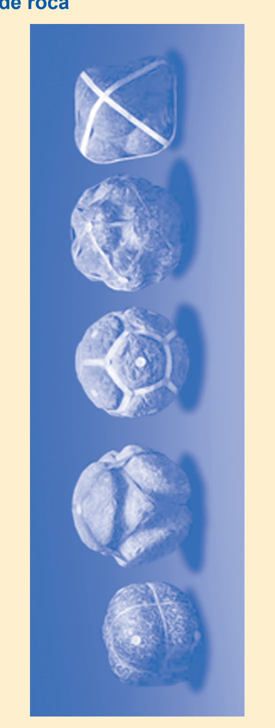
Bases: son las regiones poligonales congruentes y paralelas: $\triangle$ABC y $\triangle$DEF.
Caras laterales: son regiones paralelográmicas cuya cantidad es igual al número de lados de la base y forman la superficie lateral del prisma: □ ABED, □ EBCF, □ CFDA.
Aristas laterales: son las intersecciones de las caras laterales: $\overline{AD}$; $\overline{BE}$; $\overline{CF}$.
Altura (h): Es la distancia entre las bases.



Atención

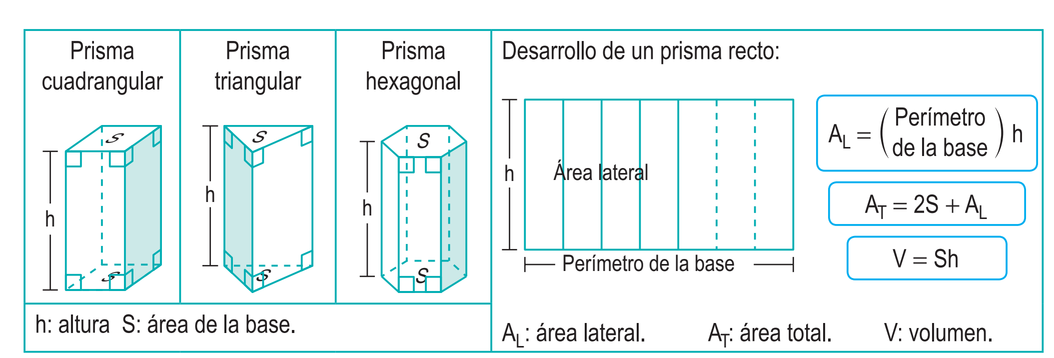
Los 5 poliedros regulares son bien conocidos como sólidos platónicos.
Es indeterminada la fecha de inicio de su estudio.

Poliedros regulares hechos de roca





Prisma recto Cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases. En este caso, las caras laterales son regiones rectangulares y la altura coincide con las aristas laterales.

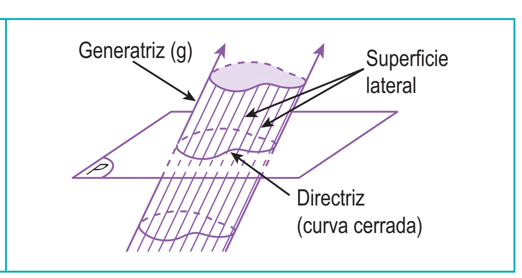


CILINDRO

Es el sólido limitado por una superficie cilíndrica y por dos planos paralelos entre sí, secantes a todas las generatrices.

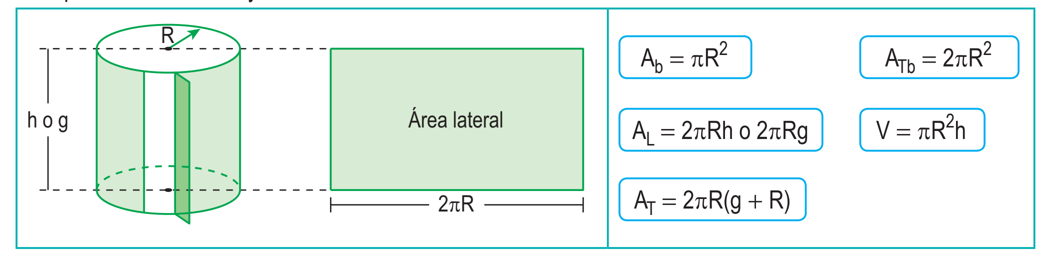
Elementos

Base (B): bases congruentes, contenidas en dos planos paralelos entre sí y secantes a todas las generatrices.
Directriz: es una línea curva plana.
Generatriz (g): recta que se desplaza paralelamente a sí misma a lo largo de la directriz.
Superficie lateral: es la superficie generada por la generatriz y que es secante a las bases.



Cilindro circular recto

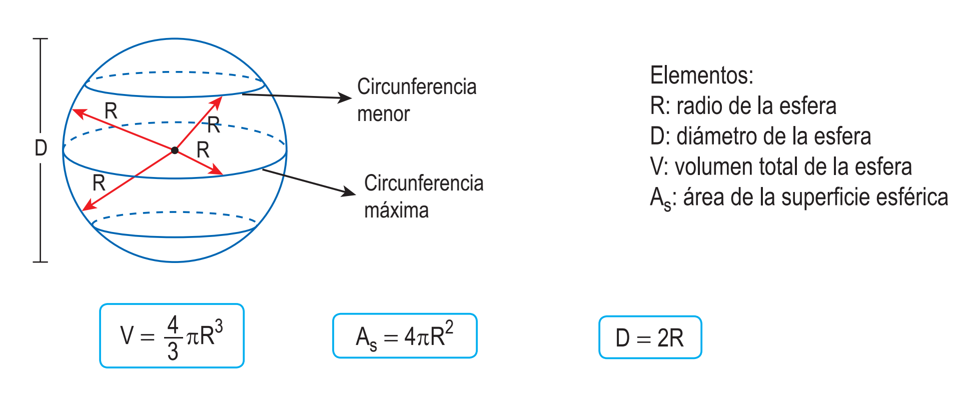
Es aquel cilindro recto cuyas bases son círculos.



Donde:
R: radio de la circunferencia.
A_b: área de la base.
A_{Tb}: área total de las bases.
A_L: área lateral del cilindro.
A_T: área total del cilindro.
V: volumen del cilindro.

ESFERA

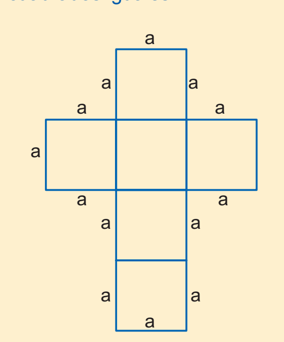
Sólido formado por infinitas superficies circulares congruentes con un mismo centro que se intersecan entre sí en una misma línea cuya medida es la diagonal de las circunferencias.

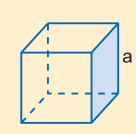


Elementos:
R: radio de la esfera
D: diámetro de la esfera
V: volumen total de la esfera
A_s: área de la superficie esférica

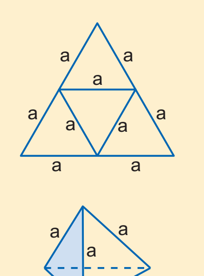
Recuerda

El cubo está formado por 6 cuadrados iguales.





Un tetraedro regular está formado por 4 triángulos equiláteros.



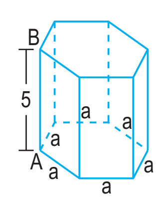


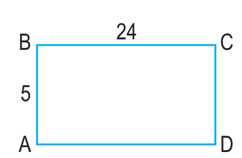
Problemas resueltos



1 Con una región rectangular ABCD se construye la superficie lateral de un prisma hexagonal regular tal que $\overline{AB}$ sea una arista lateral; AB = 5 y BC = 24. Calcula el volumen del prisma correspondiente a dicha superficie.

Resolución:





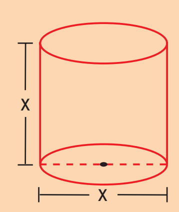
Dato: $6a = 24 \Rightarrow a = 4$

Piden: $V = A_{base}(h)$

$$A_{base} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \times 6 = 24\sqrt{3}$$

$$V = 24\sqrt{3} \times 5 \Rightarrow V = 120\sqrt{3}$$

2 Calcula x, si $A_T = 54\pi$.



Resolución:

Sabemos:

$A_T = 2\pi R(g + R)$ ...(1)

Del dato:

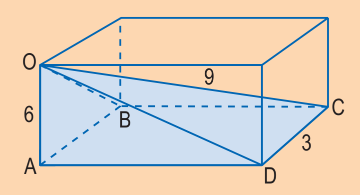
$g = h = x;\ R = \frac{x}{2}$ y $A_T = 54\pi$

Reemplazando datos en (1):

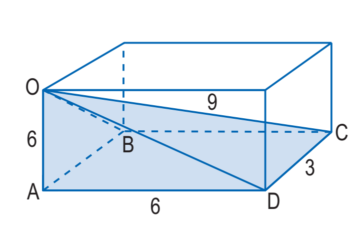
$$54\pi = 2\pi\frac{x}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow 54 = \frac{3x^2}{2}$$

$$36 = x^2 \quad \therefore\ x = 6$$

3 La figura muestra un rectoedro. Calcula el volumen de la pirámide O-ABCD.



Resolución:



Piden:

$$V = \frac{S_{base}(h)}{3}$$

Datos:

$S_{base} = 6 \times 3 = 18$

$h = 6$

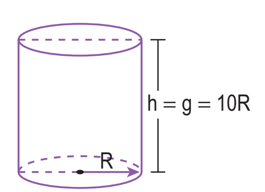
Entonces:

$$V = \frac{18(6)}{3} \Rightarrow V = 36$$

4 Si el área total de un cilindro es 198π cm^2 y su altura es 10 veces su longitud del radio del círculo de su base. Halla el radio.

Resolución:

Sea el cilindro:



Datos: $h = g = 10R$; $A_T = 198\pi$ cm^2

Área total del cilindro es:

$A_T = 2\pi R(g + R)$

Reemplazando:

$198\pi = 2\pi R(10R + R)$

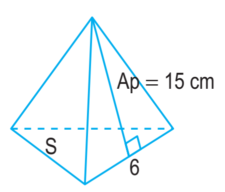
$198 = 22R^2$

$\Rightarrow R = 3$ cm

5 Una pirámide triangular regular tiene 15 cm de apotema. Si el lado de la base es 6 cm, halla su área total.

Resolución:

Sea la pirámide regular triangular:



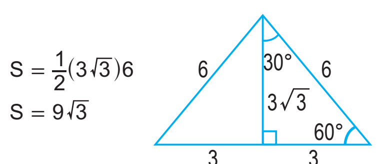
Nos piden: área total

$A_T = A_L + S$

La base es un triángulo equilátero de lado 6 cm, entonces:

$$S = \frac{1}{2}(3\sqrt{3})6$$

$$S = 9\sqrt{3}$$



perímetro = 6 + 6 + 6 = 18

semiperímetro = 9

A_L = (semiperímetro) Ap

$A_L = 9 \times 15 = 135$ cm^2

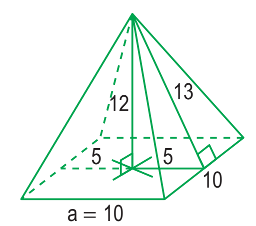
$A_T = 135 + 9\sqrt{3}$

$A_T = 135 + 9(1{,}732)$

$A_T = 150{,}59$ cm^2

6 En una pirámide cuadrangular regular, el área total es 360 u^2 y su apotema mide 13 u, calcula el volumen de la pirámide.

Resolución:



$A_T = A_{base} + A_L$

$$360 = a^2 + 4\left(\frac{a13}{2}\right)$$

$360 = a^2 + 26a$

$a^2 + 26a - 360 = 0 \Rightarrow a = 10$

Piden V:

$$V = \frac{100 \times 12}{3} \Rightarrow V = 400\ u^3$$

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO

DEFINICIÓN

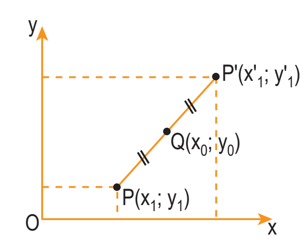
Las transformaciones geométricas son correspondencias que asocian a dos puntos en el plano cartesiano; es decir la modificación de la posición de un punto origina un segundo punto. Estas modificaciones de la posición pueden ser originadas por:

- Simetría → Se representa como (Sim).
- Traslación → Se representa como (Tras).
- Rotación → Se representa como (Rot).

SIMETRÍA EN EL PLANO CARTESIANO

Simetría puntual (de un punto)

En el plano cartesiano, un punto es simétrico de otro cuando ambos equidistan de un tercer punto fijo, el cual sería el punto de referencia simétrica.

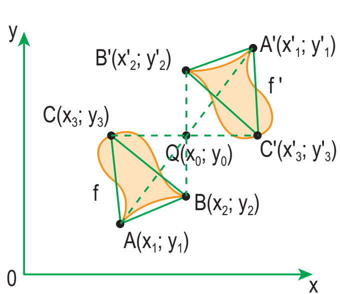


Si P'Q = QP ⇒ P' es simétrico a P.
Se representa: $P' = \text{Sim } P_{(Q)}$.
y se lee: P' es simétrico a P con respecto a Q.

Coordenadas de P': $\begin{cases} x'_1 = 2x_0 - x_1 \\ y'_1 = 2y_0 - y_1 \end{cases}$

Simetría puntual (de una figura)

En el plano cartesiano una figura es simétrica de otra cuando todos los puntos contenidos en la primera figura equidistan de los puntos contenidos en la segunda con respecto de un punto fijo; el cual sería el punto de referencia simétrica.



Si: AQ = QA'
BQ = QB' ⇒ $f' = \text{Sim } f_{(Q)}$ es simétrica a la figura f.
CQ = QC'

Se representa: $f' = \text{Sim } f_{(Q)}$ y se lee:

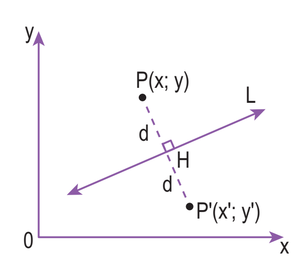
f ' es simétrico a f con respecto de Q.

La figura f contiene infinitos puntos pero elegimos tres de ellos (A; B y C). Hallamos sus respectivos puntos simétricos (A'; B' y C') de esa manera ubicamos la figura f '.

$A' = \text{Sim } A_{(Q)}$ Coordenadas de A':	$B' = \text{Sim } A_{(Q)}$ Coordenadas de B':	$C' = \text{Sim } A_{(Q)}$ Coordenadas de C':
$x'_1 = 2x_0 - x_1$	$x'_2 = 2x_0 - x_2$	$x'_3 = 2x_0 - x_3$
$y'_1 = 2y_0 - y_1$	$y'_2 = 2y_0 - y_2$	$y'_3 = 2y_0 - y_3$

Simetría axial (de un punto)

En el plano cartesiano, dos puntos son simétricos entre sí, respecto de una recta L, si la distancia de ambos puntos a dicha recta es la misma.



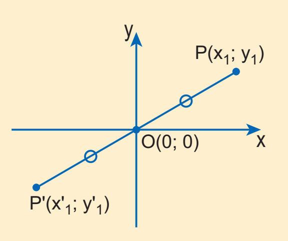
Si $\overline{PP'}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{L}$ y además PH = HP'.
⇒ P' es simétrico a P con respecto a la recta $\overleftrightarrow{L}$.

Se representa: $P' = \text{Sim } P_{(\overleftrightarrow{L})}$



Observación

Si el punto de referencia simétrica Q coincide con el origen de coordenadas (0; 0), tendremos:



Si PO = OP'
⇒ P' es simétrico a P.
∴ $P' = \text{Sim } P_{(O)}$
Además: $Q(x_0; y_0) = O(0; 0)$
⇒ coordenadas de P': $\begin{cases} x'_1 = -x_1 \\ y'_1 = -y_1 \end{cases}$

Nota

Si el punto de simetría $Q(x_0,y_0)$ coincide con el origen de coordenadas O(0; 0); tendremos:

$A' = \text{Sim } A_{(0)}$
Coordenadas de A':
$x'_1 = -x_1$
$x'_1 = -y_1$

$B' = \text{Sim } B_{(0)}$
Coordenadas de B':
$x'_2 = -x_2$
$x'_2 = -y_2$

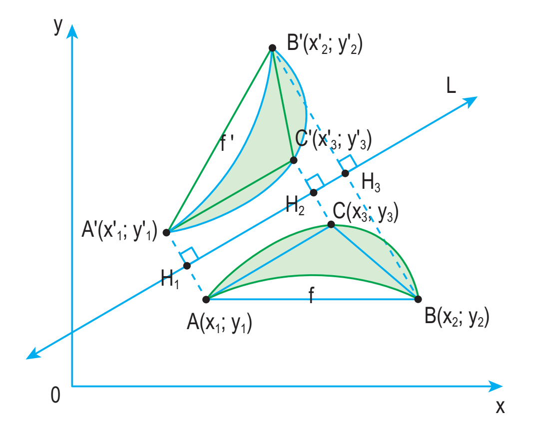
$C' = \text{Sim } C_{(0)}$
Coordenadas de C':
$x'_3 = -x_3$
$x'_3 = -y_3$

Simetría axial: (de una figura)

En el plano cartesiano, una figura es simétrica de otra, con respecto de una recta fija L, si a todos los puntos contenidos en la primera figura le corresponden otros puntos contenidos en la segunda figura, de tal manera que $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de las rectas formadas entre los puntos homólogos de ambas figuras. De esa manera $\overleftrightarrow{L}$ pasaría a ser el **eje de simetría** entre dichas figuras.

Nota

La **simetría** también es conocida como **reflexión**.



Si: $AH_1 = H_1A'$
$BH_3 = H_3B$
$CH_2 = H_2C'$
y $\overline{AA'}$; $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son perpendiculares a $\overleftrightarrow{L}$.
$\Rightarrow$ la figura f ' = Sim $f_{(\overleftrightarrow{L})}$

Observación

En una transformación geométrica cuando todos los puntos homólogos coinciden con los puntos dados, la transformación se llama **identidad** o **coincidente**.



De la figura f tomamos tres puntos cualesquiera (A; B y C) y hallamos sus puntos simétricos con respecto a la recta L, es decir, sus puntos homólogos (A'; B' y C') y de esa manera ubicamos f '.

$A' = \text{Sim } A_{(\overleftrightarrow{L})}$ $\quad B' = \text{Sim } B_{(\overleftrightarrow{L})}$ $\quad C' = \text{Sim } C_{(\overleftrightarrow{L})}$

Propiedades:

Si el eje de simetría coincide con alguno de los ejes de coordenadas (eje x; eje y).

	Simetría con el eje **x** (si $\overleftrightarrow{L} = x$)	Simetría con el eje **y** (si $\overleftrightarrow{L} = y$)
De un punto	$\Rightarrow P' = \text{Sim } P_{(\bar{x})}$ ∴ Las coordenadas de P' son: $x'_1 = x_1$ $\quad y'_1 = -y_1$	$\Rightarrow P' = \text{Sim } P_{(\bar{y})}$ ∴ Las coordenadas de P' son: $x'_1 = -x_1$ $\quad y'_1 = y_1$
De una figura	$\Rightarrow f' = \text{Sim } f_{(\bar{x})}$ ∴ Las coordenadas de tres puntos de f' son: A': $x'_1 = x_1$; $y'_1 = -y_1$ B': $x'_2 = x_2$; $y'_2 = -y_2$ C': $x'_3 = x_3$; $y'_3 = -y_3$	$\Rightarrow f' = \text{Sim } f_{(y)}$ ∴ Las coordenadas de tres puntos de F' son: A: $x'_1 = -x_1$; $y'_1 = y_1$ B: $x'_2 = -x_2$; $y'_2 = y_2$ C: $x'_3 = -x_3$; $y'_3 = y_3$

TRASLACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO

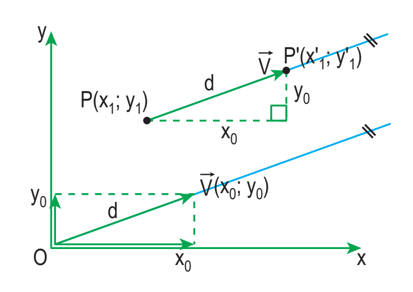
Traslación de un punto

En el plano cartesiano, un punto $P(x_1; y_1)$ varía su posición por traslación cuando se desplaza x_0 unidades horizontalmente así como y_0 unidades verticalmente; donde x_0 e y_0 son las coordenadas de la flecha $\vec{V}(x_0; y_0)$, de tal manera que $\vec{V}$ es paralela al segmento $\overline{PP'}$; siendo P' la posición final de P.

Recuerda

El plano cartesiano esta dividido en cuatro regiones denominadas **cuadrantes**, las cuales estan limitados entre sí por los ejes de coordenadas:

Segundo cuadrante IIC	Primer cuadrante IC
Tercer cuadrante IIIC	Cuarto cuadrante IVC



Si $\overline{PP'} \parallel \vec{V}$ y $\overline{PP'} \cong \vec{V}$; además, $\vec{V}(x_0; y_0)$ parte del origen de coordenadas.

⇒ P' es la traslación del punto P en dirección y sentido de $\vec{V}(x_0; y_0)$

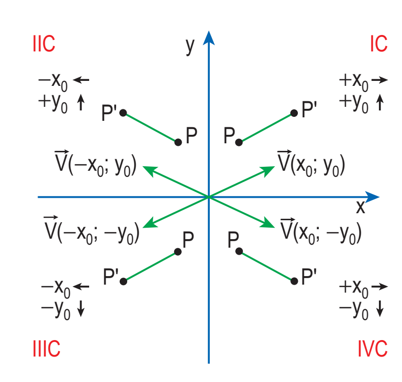
x_0 unidades horizontalmente e
y_0 unidades verticalmente.

∴ Se representa: $P' = \text{Tras } P_{(\vec{V})}$

Coordenadas de P': $x'_1 = x_1 + x_0$; $y'_1 = y_1 + y_0$



El sentido de la traslación de un punto P está dado por los signos de las coordenadas de la flecha $\vec{V}(x_0; y_0)$.



- Si x_0 es positivo, el punto P se traslada a la derecha →.
- Si x_0 es negativo, el punto P se traslada a la izquierda ←.
- Si y_0 es positivo, el punto P se traslada hacia arriba ↑.
- Si y_0 es negativo, el punto P se traslada hacia abajo ↓.

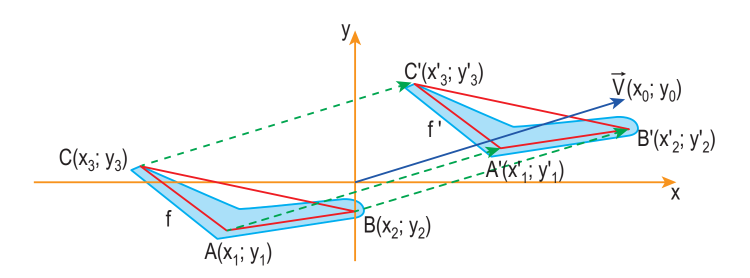
Traslación de una figura

En el plano cartesiano, una figura varía su posición por traslación cuando todos los puntos contenidos en dicha figura se desplazan x_0 unidades horizontalmente, así como y_0 unidades verticalmente, donde x_0 e y_0 son las coordenadas de la flecha $\vec{V}(x_0; y_0)$; además, la distancia que recorren los puntos de la figura es igual a la longitud de $\vec{V}$.

Observación

La distancia de traslación "d" de P a P' es igual a la longitud de la flecha V.

$\Rightarrow d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$



Si $\overline{AA'}$; $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son paralelos a $\vec{V}(x_0; y_0)$ y $AA' = BB' = CC' = d$

Entonces, f ' es la traslación de f en la dirección y sentido de $\vec{V}(x_0; y_0)$; x_0 unidades horizontalmente e y_0 unidades verticalmente.

Y representa como: $f' = \text{Tras } f_{(\vec{V})}$ donde d es la distancia de traslación: $d = \sqrt{x_0^2 + x_0^2}$



De la figura f tomamos tres puntos A; B y C y los trasladamos siguiendo la dirección y sentido de $\vec{V}$ (x_0 unidades horizontalmente e y_0 unidades verticalmente); obtenemos así los puntos A'; B' y C' que a su vez pertenecen a la figura F'; de esta manera ubicamos F'.



A' = Tras $A_{(\vec{V})}$	B' = Tras $B_{(\vec{V})}$	C' = Tras $C_{(\vec{V})}$
Coordenadas de A':	Coordenadas de B':	Coordenadas de C':
$x'_1 = x_1 + x_0$ $y'_1 = y_1 + y_0$	$x'_2 = x_2 + x_0$ $y'_2 = y_2 + y_0$	$x'_3 = x_3 + x_0$ $y'_3 = y_3 + y_0$

Propiedades

Cuando las traslaciones se hacen en dirección de los ejes de coordenadas (eje x; eje y).

	Traslación en el eje **x** (si $\vec{V}(x_0; 0)$)	Traslación en el eje **y** (Si $\vec{V}(0; y_0)$)
De un punto	$\Rightarrow$ P' = Tras $P_{(\vec{V})}$ donde: $\vec{V}(x_0; 0)$. $\therefore$ Las coordenadas de P' son: $x'_1 = x_1 + x_0$ $y'_1 = y_1$	$\Rightarrow$ P' = Tras $P_{(\vec{V})}$ donde: $\vec{V}(0; y_0)$. $\therefore$ Las coordenadas de P' son: $x'_1 = x_1$ $y'_1 = y_1 + y_0$
De una figura	$\Rightarrow$ f' = Tras $f_{(\vec{V})}$ $\therefore$ Las coordenadas de los tres puntos de f' son: Punto A': $x'_1 = x_1 + x_0$, $y'_1 = y_1$ Punto B': $x'_2 = x_2 + x_0$, $y'_2 = y_2$ Punto C': $x'_3 = x_3 + x_0$, $y'_3 = y_3$	$\Rightarrow$ f' = Tras $f_{(\vec{V})}$ $\therefore$ Las coordenadas de tres puntos de f' son: Punto A: $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1 + y_0$ Punto B: $x'_2 = x_2$, $y'_2 = y_2 + y_0$ Punto C: $x'_3 = x_3$, $y'_3 = y_3 + y_0$

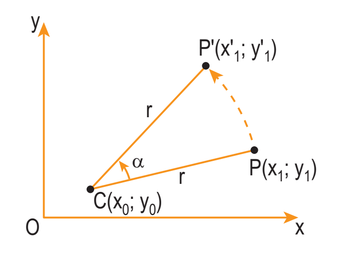
Se dice que una transformación geométrica es **unívoca** cuando a cada elemento de una figura le corresponde un elemento y solamente un elemento de la figura transformada.

Así mismo, se dice que una transformación es **biunívoca** cuando a cada elemento de una figura le corresponde un elemento y únicamente un elemento de la figura transformada y a este, le corresponde un elemento y solamente un elemento de la figura original.

ROTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO

Rotación de un punto

En el plano cartesiano un punto varía su posición por rotación cuando gira un ángulo α con respecto a un punto fijo C, de tal manera que CP = CP'; además, C sería el **centro de giro**.



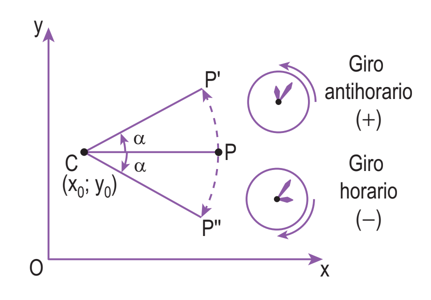
Si: CP = CP' y $C(x_0; y_0)$ es el centro de giro

⇒ P' es la rotación del punto P con respecto a $C(x_0; y_0)$ con una magnitud de α.

- Se represent a: $P' = \text{Rot}\, P_{(C;\, \alpha)}$
- Coordenadas de P':

$$x_1' = x_0 + (x_1 - x_0)\cos\alpha - (y_1 - y_0)\operatorname{sen}\alpha$$
$$y_1' = y_0 + (x_1 - x_0)\operatorname{sen}\alpha + (y_1 - y_0)\cos\alpha$$

El sentido de giro del ángulo α tiene por referencia el giro de las manecillas del reloj.

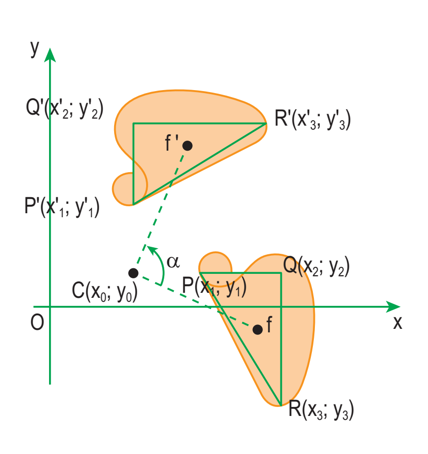


Si $C(x_0; y_0)$ es el centro de giro y CP = CP' = CP'':

- El punto P' es producto de una rotación positiva pues su giro es en sentido **antihorario** ⇒ $P' = \text{Rot}\, P_{(C;\, \alpha)}$.
- El punto P'' es producto de una rotación negativa pues su giro es en sentido **horario** ⇒ $P' = \text{Rot}\, P_{(C;\, -\alpha)}$.
- El signo negativo representa un giro opuesto (horario) al giro original α (antihorario).

Rotación de una figura

En el plano cartesiano una figura varía su posición por rotación cuando todos los puntos contenidos en dicha figura giran un ángulo α en un sentido dado (horario o antihorario) con respecto a un punto fijo $C(x_0; y_0)$, el cual será llamado centro de giro o centro de rotación.



Si: CR = CR', CP = CP', CQ = CQ' y $C(x_0; y_0)$ es el centro de giro.

⇒ f' es la rotación de f un ángulo de α y con respecto a $C(x_0; y_0)$.

Se representa: $f' = \text{Rot}\, f_{(C;\, \alpha)}$

De la figura f tomamos tres puntos P; Q y R y los rotamos un ángulo α y con respecto al punto $C(x_0; y_0)$ obtenemos así a P'; Q' y R' que a su vez pertenecen a la figura f', que vendría a ser la rotación de f en las condiciones dadas.

$P' = \text{Rot}\, P_{(C;\, \alpha)}$
Coordenadas de P':

$$x_1' = x_0 + (x_1 - x_0)\cos\alpha - (y_1 - y_0)\operatorname{sen}\alpha$$
$$y_1' = y_0 + (x_1 - x_0)\operatorname{sen}\alpha + (y_1 - y_0)\cos\alpha$$

$Q' = \text{Rot}\, Q_{(C;\, \alpha)}$
Coordenadas de Q':

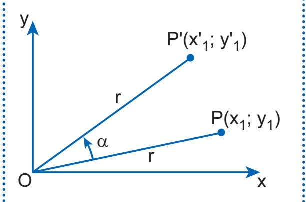
$$x_2' = x_0 + (x_2 - x_0)\cos\alpha - (y_2 - y_0)\operatorname{sen}\alpha$$
$$y_2' = y_0 + (x_2 - x_0)\operatorname{sen}\alpha + (y_2 - y_0)\cos\alpha$$

$R' = \text{Rot}\, R_{(C;\, \alpha)}$
Coordenadas de R':

$$x_3' = x_0 + (x_3 - x_0)\cos\alpha - (y_3 - y_0)\operatorname{sen}\alpha$$
$$y_3' = y_0 + (x_3 - x_0)\operatorname{sen}\alpha + (y_3 - y_0)\cos\alpha$$

Nota

Cuando el centro de giro $C(x_0; y_0)$ coincide con el origen de coordenadas.



Si OP = OP' y O(0; 0) es el centro de giro

⇒ $P' = \text{Rot}\, P_{(O;\, \alpha)}$

Además: $C(x_0; y_0) = O(0; 0)$

Coordenadas de P':

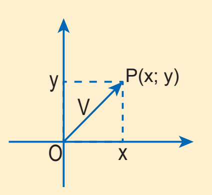
$$x_1' = x_1\cos\alpha - y_1\operatorname{sen}\alpha$$
$$y_1' = x_1\operatorname{sen}\alpha + y_1\cos\alpha$$

Atención

La rotación es una transformación unívoca; en la rotación, el centro de giro es el único punto doble.

Observación

El **radio vector** de un punto P(x; y) es igual a la longitud del segmento que une el origen de coordenadas (0; 0) con dicho punto P(x; y).

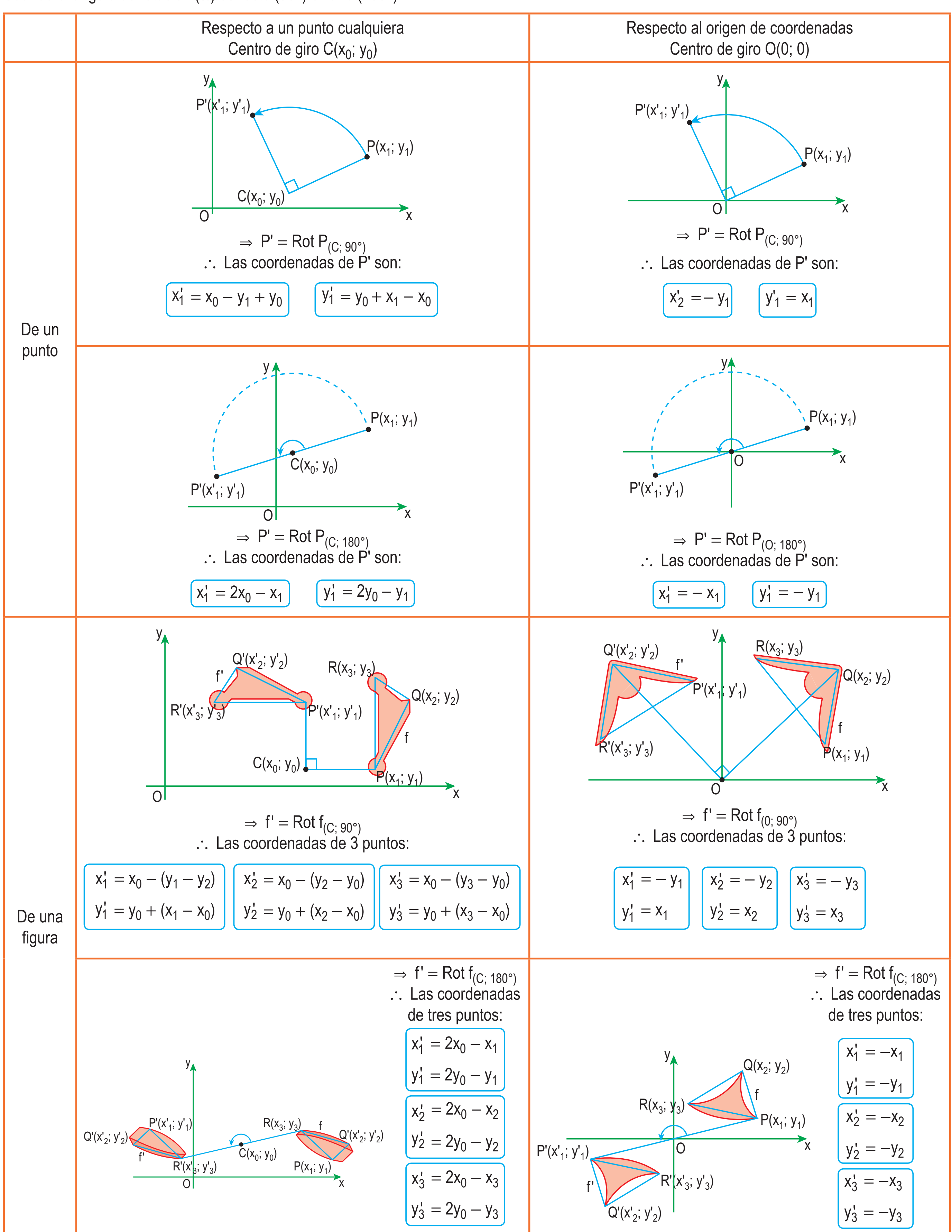


⇒ $V_p = \sqrt{x^2 + y^2}$

donde V_P es el radio vector del punto P(x; y).

Propiedades

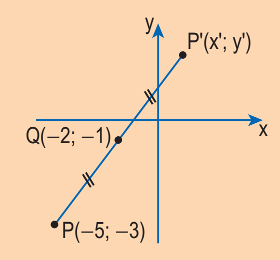
Cuando el ángulo de rotación (α) es recto (90°) o llano (180°).



	Respecto a un punto cualquiera Centro de giro $C(x_0; y_0)$	Respecto al origen de coordenadas Centro de giro $O(0; 0)$
De un punto	$\Rightarrow$ P' = Rot $P_{(C;\ 90°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de P' son: $x'_1 = x_0 - y_1 + y_0$ $y'_1 = y_0 + x_1 - x_0$	$\Rightarrow$ P' = Rot $P_{(C;\ 90°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de P' son: $x'_2 = -y_1$ $y'_1 = x_1$
	$\Rightarrow$ P' = Rot $P_{(C;\ 180°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de P' son: $x'_1 = 2x_0 - x_1$ $y'_1 = 2y_0 - y_1$	$\Rightarrow$ P' = Rot $P_{(O;\ 180°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de P' son: $x'_1 = -x_1$ $y'_1 = -y_1$
De una figura	$\Rightarrow$ f' = Rot $f_{(C;\ 90°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de 3 puntos: $x'_1 = x_0 - (y_1 - y_2)$, $y'_1 = y_0 + (x_1 - x_0)$ $x'_2 = x_0 - (y_2 - y_0)$, $y'_2 = y_0 + (x_2 - x_0)$ $x'_3 = x_0 - (y_3 - y_0)$, $y'_3 = y_0 + (x_3 - x_0)$	$\Rightarrow$ f' = Rot $f_{(0;\ 90°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de 3 puntos: $x'_1 = -y_1$, $y'_1 = x_1$ $x'_2 = -y_2$, $y'_2 = x_2$ $x'_3 = -y_3$, $y'_3 = x_3$
	$\Rightarrow$ f' = Rot $f_{(C;\ 180°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de tres puntos: $x'_1 = 2x_0 - x_1$, $y'_1 = 2y_0 - y_1$ $x'_2 = 2x_0 - x_2$, $y'_2 = 2y_0 - y_2$ $x'_3 = 2x_0 - x_3$, $y'_3 = 2y_0 - y_3$	$\Rightarrow$ f' = Rot $f_{(C;\ 180°)}$ $\therefore$ Las coordenadas de tres puntos: $x'_1 = -x_1$, $y'_1 = -y_1$ $x'_2 = -x_2$, $y'_2 = -y_2$ $x'_3 = -x_3$, $y'_3 = -y_3$

Problemas resueltos

1 Halla el punto simétrico a P(–5; –3) con respecto al punto (–2; –1).



Resolución:

Piden: $P' = \text{Sim } P_{(Q)}$

$P' = \text{Sim}(-5; -3)_{(Q)}$

$\Rightarrow Q(-2; -1) \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow P(-5; -3) \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$

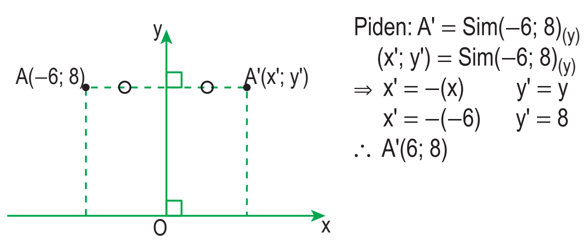
Hallamos las coordenadas de P'(x'; y'):

$x' = 2(-2) - (-5) \Rightarrow x = 1$

$y' = 2(-1) - (-3) \Rightarrow y = 1 \quad \therefore P'(1; 1)$

2 Halla el radio vector del punto simétrico a (–6; 8) con respecto al eje y.

Resolución:



Piden: $A' = \text{Sim}(-6; 8)_{(y)}$

$(x'; y') = \text{Sim}(-6; 8)_{(y)}$

$\Rightarrow x' = -(x) \qquad y' = y$

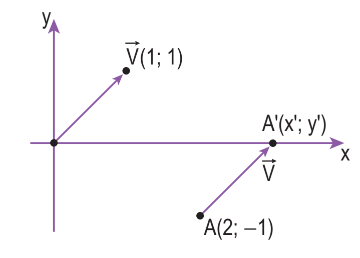
$x' = -(-6) \qquad y' = 8$

$\therefore A'(6; 8)$

Radio vector A'(6; 8) $\Rightarrow V_{A'} = \sqrt{6^2 + 8^2} \Rightarrow V_A = 10$

3 Hallar las coordenadas de la traslación del punto A(2; –1) en dirección de la flecha $\vec{V}(1; 1)$

Resolución:



Piden $A' = \text{Tras } A_{(\vec{V})}$

$A' = \text{Tras}(2; -1)_{(\vec{V})}$; donde $\vec{V}(1; 1)$

$x = 2 \qquad x_0 = 1$

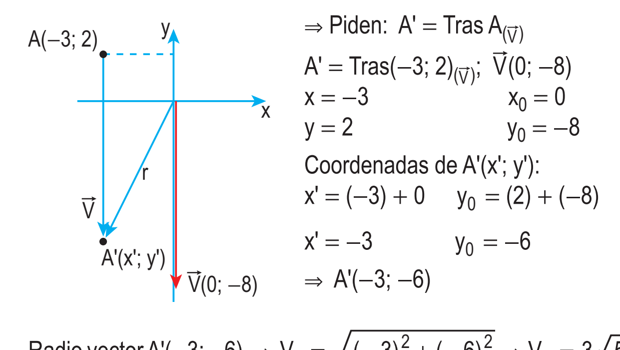
$y = -1 \qquad y_0 = 1$

Coordenadas de A'(x'; y'):

$\left.\begin{array}{ll} x' = (2) + (1) & y' = (-1) + (1) \\ x' = 3 & y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A'(3; 0)$

4 Halla el radio vector del punto resultante de la traslación de A(–3; 2). Si este punto ha sido trasladado siguiendo la dirección de la flecha (0; –8).

Resolución:



$\Rightarrow$ Piden: $A' = \text{Tras } A_{(\vec{V})}$

$A' = \text{Tras}(-3; 2)_{(\vec{V})}$; $\vec{V}(0; -8)$

$x = -3 \qquad x_0 = 0$

$y = 2 \qquad y_0 = -8$

Coordenadas de A'(x'; y'):

$x' = (-3) + 0 \qquad y_0 = (2) + (-8)$

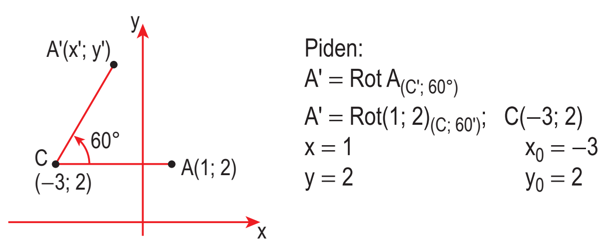
$x' = -3 \qquad y_0 = -6$

$\Rightarrow A'(-3; -6)$

Radio vector A'(–3; –6) $\Rightarrow V_{A'} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} \Rightarrow V_{A'} = 3\sqrt{5}$

5 Halla el producto de las coordenadas de A', Si dicho punto es resultado de la rotación de 60° de A(1; 2) con respecto al punto (–3; 2), en sentido antihorario.

Resolución:



Piden:

$A' = \text{Rot } A_{(C; 60°)}$

$A' = \text{Rot}(1; 2)_{(C; 60°)}$; C(–3; 2)

$x = 1 \qquad x_0 = -3$

$y = 2 \qquad y_0 = 2$

Coordenadas da A'(x'; y'):

$x' = (-3) + (1 - (-3))\cos60° - (2 - 2)\text{sen}60°$

$x' = -3 + 4\,(1/2) \Rightarrow x' = -1$

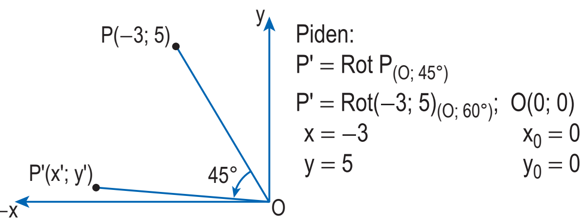
$y' = (2) + (1 - (-3))\text{sen}60° + (2 - 2)\cos60°$

$y' = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(4) \Rightarrow y' = 2 + 2\sqrt{3} \qquad \therefore A'(-1; 2 + 2\sqrt{3})$

Piden (x')(y') $\Rightarrow x'y' = -2 - 2\sqrt{3}$

6 Halla las coordenadas de la posición final de (–3; 5), si este punto ha rotado 45° con respecto al origen de coordenadas, en sentido antihorario.

Resolución:



Piden:

$P' = \text{Rot } P_{(O; 45°)}$

$P' = \text{Rot}(-3; 5)_{(O; 60°)}$; O(0; 0)

$x = -3 \qquad x_0 = 0$

$y = 5 \qquad y_0 = 0$

Coordenadas de P'(x'; y')

$x' = (-3)\cos45° - (5)\text{sen}45° \qquad y' = (-3)\text{sen}45° + (5)\cos45°$

$x' = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y' = -3\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x' = -4\sqrt{2} \qquad y' = \sqrt{2}$

$\therefore P' = (-4\sqrt{2}; \sqrt{2})$